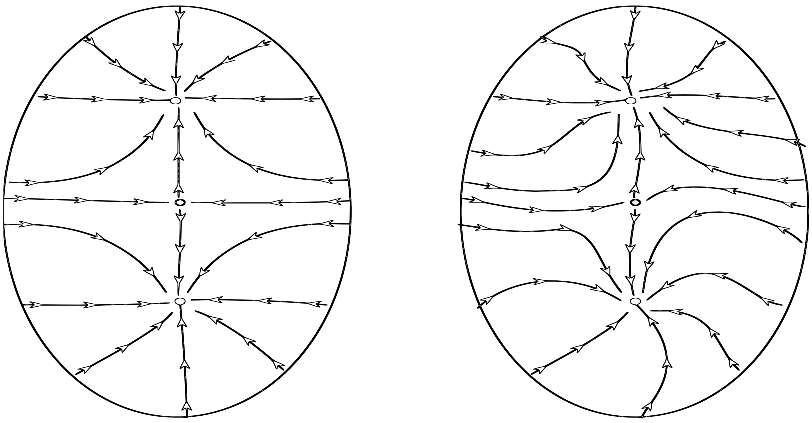
Μεταπτυχιακή Εργασία

Δομική Ευστάθεια Δυναμικών Συστημάτων

Συντάκτης:
Σπύρος Πέττας

Επιβλέπων:
Νικόλαος Καραχάλιος



Πανεπιστήμιο Αιγαίου Τμήμα Μαθηματικών
ΠΜΣ Μαθηματική Μοντελοποίηση στις Φυσικές Επιστήμες και στις Σύγχρονες Τεχνολογίες

Σάμος 2008

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Το κίνητρο μας

Στις εφαρμογές απαιτούμε τα μαθηματικά μοντέλα να είναι «ανθεκτικά», εννοώντας πως τα ποιοτικά χαρακτηριστικά τους δεν θα πρέπει να αλλάζουν σημαντικά, όταν το μοντέλο διαταράσσεται με «ήπιο» τρόπο. Αν θέλουμε να κάνουμε την ιδέα πιο συγκεκριμένη, πρέπει να καθορίσουμε μια κλάση διαταραχών του μοντέλου, και με κάποιο τρόπο να διακρίνουμε πότε αυτές είναι «μικρές». Από θεωρητική σκοπιά, αυτό σημαίνει ότι θεωρούμε το μοντέλο ως ένα μέλος ενός επιλεγμένου χώρου H δυναμικών συστημάτων, τον οποίο εφοδιάζουμε με μια κατάλληλη νόρμα. Τότε είμαστε σε θέση να δώσουμε νόημα στην ιδέα ότι η διαταραχή είναι «κοντά» στο αρχικό μοντέλο. Ένα δυναμικό σύστημα του οποίου οι τοπολογικές ιδιότητες είναι κοινές με όλα τα συστήματα που βρίσκονται «αρκετά κοντά» του, λέγεται *δομικά ευσταθές*.

Στην εργασία αυτή κάνουμε μια σύντομη εισαγωγική παρουσίαση της έννοιας της δομικής ευστάθειας. Θα ξεκινήσουμε από την απλούστερη περίπτωση των γραμμικών συστημάτων. Συγκεκριμένα θα δούμε ότι η γραμμική ροή είναι δομικά ευσταθής αν και μόνο αν είναι υπερβολική και ότι η δομική ευστάθεια είναι μια γενική ιδιότητα για τα γραμμικά συστήματα (υπό την έννοια ότι οι δομικά ευσταθείς ροές είναι πυκνό υποσύνολο του συνόλου των γραμμικών ροών).

Στη συνέχεια θα συζητήσουμε την έννοια της *τοπικής δομικής ευστάθειας* για μη γραμμικά συστήματα. Η έννοια της τοπικής δομικής ευστάθειας αναφέρεται σε διαταραχές διανυσματικών πεδίων «κοντά» σε σημεία ισορροπίας ή περιοδικές τροχιές και για μικρές διαταραχές. Στο τελευταίο μέρος, θα συζητήσουμε την έννοια της *ολικής δομικής ευστάθειας*. Τα μόνα γνωστά αποτελέσματα, αφορούν στη γενικότερη περίπτωση, διανυσματικά πεδία ορισμένα σε συμπαγείς πολλαπλότητες δύο διαστάσεων. Η δομική ευστάθεια είναι και πάλι γενική ιδιότητα αυτών των ροών, όπως υποδεικνύει το θεώρημα του Peixoto στο οποίο αναφερόμαστε στο τέλος της εργασίας.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι ενώ η η δομική ευστάθεια είναι γενική ιδιότητα ροών που ορίζονται από διανυσματικά πεδία σε πολλαπλότητες διάστασης $n \leq 2$, το συμπέρασμα αυτό δεν ισχύει για $n \geq 3$. Το πρώτο αντιπαράδειγμα το έδωσε ο Smale[3].

1.2 Βασικές έννοιες

Έστω U ένα ανοιχτό σύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε μια συνάρτηση $g : U \to \mathbb{R}$ λέγεται ότι είναι κλάσης C^r αν είναι r φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, και $1 \leq r \leq \infty$. Έστω V ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ και $\mathbf{G} : U \to V$. Με δεδομένες τις συντεταγμένες $(x_1, ..., x_n)$ στον U και $(y_1, ..., y_m)$ στον V, η $\mathbf{G}$ μπορεί να εκφραστεί με όρους συναρτήσεων συντεταγμένων (ή αλλιώς, καμπύλων συντεταγμένων) $g_i : U \to \mathbb{R}$, όπου

$$y_i = g_i(x_1, ..., x_n), i = 1, ..., m. \tag{1.1}$$

Η απεικόνιση $\mathbf{G}$ καλείται C^r παραγωγίσιμη απεικόνιση, αν οι g_i είναι C^r για κάθε $i = 1, ..., m$, για κάποιο $1 \leq r \leq \infty$. Η $\mathbf{G}$ λέγεται λεία αν είναι C^∞. Οι απεικονίσεις οι οποίες είναι συνεχείς άλλα όχι παραγωγήσιμες καλούνται συμβατικά C^0.

Ορισμός 1.1. *Η $\mathbf{G}$ λέγεται ότι είναι διαφορομορφισμός αν είναι ένα προς ένα και επί, και τόσο η $\mathbf{G}$ όσο και η $\mathbf{G}^{-1}$ είναι παραγωγήσιμες απεικονίσεις. Η $\mathbf{G}$ λέγεται C^k διαφορομορφισμός αν τόσο η $\mathbf{G}$ όσο και η $\mathbf{G}^{-1}$ είναι C^k απεικονίσεις.*

Παρατηρούμε ότι η $\mathbf{G} : U \to V$ είναι διαφορομορφισμός αν και μόνο αν $m = n$, και ο πίνακας των μερικών παραγώγων

$$D\mathbf{G}(x_1, ..., x_n) = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]_{i,j=1}^{n}, \tag{1.2}$$

είναι μη-ιδιάζων σε κάθε $\mathbf{x} \in U$. Έτσι η $\mathbf{G}(x, y) = (\exp y, \exp x)^T$ με $U = \mathbb{R}^2$ και $V = (x, y) \mid x, y > 0$ είναι ένας διαφορομορφισμός επειδή $\mathrm{Det}D\mathbf{G}(x, y) = -exp(x + y) \neq 0$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Αν η $\mathbf{G}$ ικανοποιεί τον ορισμό 1.1 και οι $\mathbf{G}, \mathbf{G}^{-1}$ είναι συνεχείς αλλά όχι απαραίτητα παραγωγίσιμες απεικονίσεις, τότε η G λέγεται ομοιομορφισμός (homeomorphism). Όπως θα δούμε, αυτές οι απεικονίσεις παίζουν κεντρικό ρόλο στη δυναμική των ροών και διαφορομορφισμών.

Οι παραπάνω ορισμοί είναι επαρκείς εφόσον ο χώρος φάσεων είναι ευκλείδειος. Όμως πολλές φορές (και σε πολλές εφαρμογές), ο φυσικός χώρος της

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] & W \arrow[d, "h"] \\ U \arrow[u, "h^{-1}"] \arrow[r, "\tilde{f}"'] & U \end{tikzcd}$$

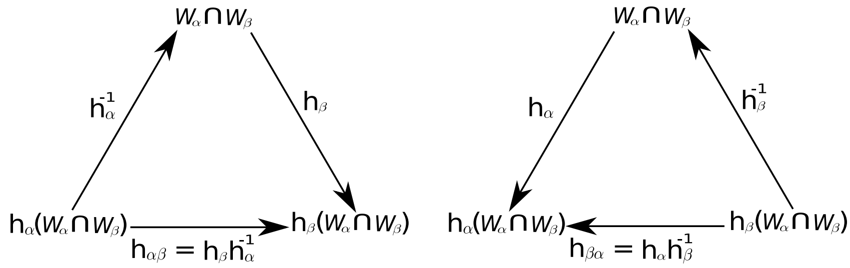
Σχήμα 1.1: Σχήμα σχέσεων που αναπαριστά την αντιπροσώπευσή της $\mathbf{f}$ που ορίζεται σε ένα ανοιχτό σύνολο W της M σε ένα τοπικό διάγραμμα $(U, \mathbf{h})$

δυναμικής είναι μια *παραγωγίσιμη πολλαπλότητα*. Μολονότι τα περισσότερα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε αφορούν τη δυναμική στο $\mathbb{R}^n$, πολλά από αυτά γενικεύονται και σε πολλαπλότητες, όπως το θεώρημα του Peixoto, το οποίο θα διατυπώσουμε στο τελευταίο μέρος της εργασίας. Για το λόγο αυτό θα κάνουμε και μια σύντομη αναφορά στην έννοια της πολλαπλότητας.

Το σημαντικό στοιχείο είναι ότι οι πολλαπλότητες έχουν την ιδιότητα να είναι «τοπικά ευκλείδειες», και αυτό μας επιτρέπει να επεκτείνουμε την ιδέα της παραγωγισιμότητας σε συναρτήσεις ορισμένες πάνω σε αυτές. Αν η M είναι πολλαπλότητα διάστασης n, τότε για κάθε $\mathbf{x} \in M$ υπάρχει μια γειτονιά $W \subseteq M$ που περιέχει το $\mathbf{x}$ και ένας ομοιομορφισμός $\mathbf{h} : W \to \mathbb{R}^n$ ο οποίος απεικονίζει την W σε γειτονιές της $h(x) \in \mathbb{R}^n$. Αφού μπορούμε να ορίσουμε συντεταγμένες στον $U = \mathbf{h}(W) \subseteq \mathbb{R}^n$ (του οποίου οι καμπύλες μπορούν να απεικονιστούν πίσω στον W μέσω της $\mathbf{h}^{-1}$), μπορούμε να θεωρήσουμε τον $\mathbf{h}$ να ορίζει τις τοπικές συντεταγμένες του υποσυνόλου W του M.

Το ζευγάρι $(U, \mathbf{h})$, λέγεται *χάρτης* και μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να μας δώσει νόημα όσον αφορά την παραγωγισιμότητα στον W. Ας υποθέσουμε χάριν απλότητας, ότι η $f : W \to W$. Τότε η f επάγει μια απεικόνιση $\tilde{f} = \mathbf{h} \cdot f \cdot \mathbf{h}^{-1} : U \to U$. Μπορούμε να πούμε ότι η f είναι μια C^k απεικόνιση στον W αν η f είναι C^k στον U. Αυτή η κατασκευή μας επιτρέπει να δώσουμε τον ορισμό τοφ τοπικού διαφορομορφισμού στη M.

Για να αποκτήσουμε μια ολική περιγραφή της πολλαπλότητας, την καλύπτουμε με μια οικογένεια ανοιχτών συνόλων, W_α, το καθένα από τα οποία συσχετίζεται με ένα χάρτη $(U_\alpha, \mathbf{h}_\alpha)$ (το σύνολο όλων των διαγραμμάτων λέγεται άτλας). Αν η $W_\alpha \cap W_\beta$, δεν είναι κενή, τότε είτε το $(U_\alpha, \mathbf{h}_\alpha)$ είτε το $(U_\beta, \mathbf{h}_\beta)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μας δώσει τοπικές συντεταγμένες για την $W_\alpha \cap W_\beta$. Αυτή η πιθανότητα μας εισάγει επικαλυπτόμενος απεικονίσεις: την $\mathbf{h}_{\alpha\beta}$ και την $\mathbf{h}_{\beta\alpha}$ μεταξύ της $\mathbf{h}_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta) \subseteq U_\alpha$ και της $\mathbf{h}_\beta(W_\alpha \cap W_\beta) \subseteq U_\beta$, αντίστοιχα. Αν θεωρήσουμε την $f : W_\alpha \cap W_\beta \to W_\alpha \cap W_\beta$, έχουμε τότε δύο εναλλακτικούς αντιπροσώπους $\tilde{f}_\alpha = \mathbf{h}_\alpha \cdot f \cdot {\mathbf{h}_\alpha}^{-1}$ και $\tilde{f}_\beta = \mathbf{h}_\beta \cdot f \cdot {\mathbf{h}_\beta}^{-1}$. Εφό-



Σχήμα 1.2: Σχήμα που αναπαριστά τον ορισμό των αλληλοκαλυπτόμενων απεικονίσεων $h_{\alpha\beta}$ και $h_{\beta\alpha}$. Σημειώνουμε ότι $h_{\beta\alpha} = h_{\alpha\beta}^{-1}$

σον η $\tilde{f}_\alpha$ και η $\tilde{f}_\beta$ ορίζονται από διαφορετικούς χάρτες, υπάρχει η πιθανότητα να ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις παραγωγισιμότητας. 'Ετσι η κλάση της f να μπορεί να είναι γενικά αόριστη. Μια πολλαπλότητα λέγεται *παραγωγίσιμη* αν όλες οι επικαλυπτόμενες απεικονίσεις είναι διαφορομορφισμοί της ίδιας κλάσης παραγωγισμότητας. Από το σχήμα 1.2 προκύπτει

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_\beta &= \mathbf{h}_\beta \cdot f \cdot \mathbf{h}_\beta{}^{-1} \\
&= (\mathbf{h}_\beta \cdot \mathbf{h}_\alpha{}^{-1}) \cdot (\mathbf{h}_\alpha \cdot f \cdot \mathbf{h}_\alpha{}^{-1}) \cdot (\mathbf{h}_\alpha \cdot \mathbf{h}_\beta{}^{-1}) \\
&= \mathbf{h}_{\alpha\beta} \cdot \tilde{f}_\alpha \cdot \mathbf{h}_{\alpha\beta}^{-1}.
\end{aligned}$$

Όλοι οι τοπικοί αντιπρόσωποι της f είναι της ίδιας κλάσης παραγωγισιμότητας, π.χ. C^k με $k \leq r$. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι το r καθορίζεται εξόλοκλήρου από τους χάρτες και επομένως από την δομή της M. Μια πολλαπλότητα με επικαλυπτόμενες απεικονίσεις κλάσης C^r καλείται C^r πολλαπλότητα.

Στην παραπάνω συζήτηση θεωρήσαμε για λόγους απλότητας μόνο τις απεικονίσεις που μετασχηματίζουν ένα χάρτη στον εαυτό του. Αυτό δεν είναι αληθές γενικά. Π.χ. για $f : M \to M$, μπορούμε να έχουμε $f : W_\alpha \to W_\beta$, και $f : W_\alpha \cap W_\gamma \to W_\beta \cup W_\delta$.

1.3 Δυναμική των διαφορομορφισμών

Έστω M μια παραγωγίσιμη πολλαπλότητα και έστω $f : M \to M$ ένας διαφορομορφισμός. Για κάθε $\mathbf{x} \in M$, θα ορίσουμε μια ακολουθία διακριτών σημείων, την τροχιά του $\mathbf{x}$ υπό την επίδραση της f. Συγκεκριμένα, η τροχιά του $\mathbf{x}$ υπό την επίδραση της f ορίζεται ως $f^m(\mathbf{x})|\ m \in \mathbb{Z}$. Για $m \in \mathbb{Z}^+$ η f^m είναι η δράση της f πάνω στον εαυτό της m φορές. Αφού η f είναι διαφορομορφισμός, η f^{-1} υπάρχει και $f^{-m} = (f^{-1})^m$. Τέλος $f^0 = id_M$, η ταυτοτική απεικόνιση στην M.

Τυπικά, η τροχιά του $\mathbf{x}$ είναι μια άπειρη ακολουθία διακεκριμένων σημείων της M. Ωστόσο υπάρχουν δύο σημαντικές εξαιρέσεις.

Ορισμός 1.2. *Ένα σημείο $\mathbf{x}^* \in M$ καλείται στάσιμο σημείο της f, αν $f^m(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$ για όλα τα $m \in \mathbb{Z}$.*

Ορισμός 1.3. *Ένα σημείο $\mathbf{x}^* \in M$ είναι περιοδικό σημείο της f, αν $f^q(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$ για κάποιο ακέραιο $q \geq 1$.*

Η ελάχιστη τιμή της q που ικανοποιεί τον ορισμό 1.2.2 καλείται περίοδος του σημείου $\mathbf{x}^*$ Τότε, η τροχιά

$$\mathbf{x}^*, f(x^*), ..., f^{q-1}(\mathbf{x}^*), \tag{1.3}$$

καλείται περιοδική τροχιά με περίοδο q η $q-$κύκλος της f.

Ορισμός 1.4. *Ένας γραμμικός διαφορομορφισμός $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ λέγεται υπερβολικός αν δεν έχει ιδιοτιμές μέτρου ίσου με 1.*

Ένας γραμμικός διαφορομορφισμός $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ λέγεται συστολή (επέκταση) αν όλες οι ιδιοτιμές έχουν μέτρο μικρότερο από (μεγαλύτερο από) 1. Μπορεί να αποδειχθεί το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1. *Αν $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ένας υπερβολικός γραμμικός διαφορομορφισμός, τότε υπάρχουν υπόχωροι E^s και $E^u \subseteq \mathbb{R}^n$ αναλλοίωτοι κάτω από την επίδραση του $\mathbf{A}$, τέτοιοι ώστε ο $\mathbf{A}|E^s$ να είναι συστολή, ο $\mathbf{A}|E^u$ να είναι επέκταση και $E^s \oplus E^u = \mathbb{R}^n$.*

Για παράδειγμα, αν ο $\mathbf{A}$ έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε για κάθε $m \in \mathbb{Z}^+$ ισχύει

$$\mathbf{A}^m\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}^m\mathbf{M}\mathbf{x}, \tag{1.4}$$

όπου

$$\mathbf{D} = [\lambda_i \delta_{ij}]_{i,j=1}^l \qquad \text{με} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Η i στήλη του $\mathbf{M}$ στην (1.4), είναι ιδιοδιάνυσμα του $\mathbf{A}$ με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ_i. Οι υπόχωροι E^s και E^u του θεωρήματος 1.1 εύκολα αναγνωρίζονται ως οι ιδιόχωροι των ιδιοδιανυσμάτων με μέτρο μεγαλύτερο ή μικρότερο του 1. Καλούνται συνήθως ως οι ασταθείς και ευσταθείς υπόχωροι του $\mathbf{A}$. Το ευθύ άθροισμα των E^s και E^u δίνει όλο το $\mathbb{R}^n$, αφού για υπερβολικό $\mathbf{A}$ δεν υπάρχει ιδιοτιμή που να μην συσχετίζεται με τα E^s και E^u. Φυσικά για τις επεκτάσεις ισχύει $E^u = \mathbb{R}^n$ και για τις συστολές $E^s = \mathbb{R}^n$. Επιπλέον, όταν $E^s, E^u \neq \mathbb{R}^n$ ο διαφορομορφισμός λέγεται σαγματικός.

Δοθέντος ενός γραμμικού διαφορομορφισμού $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, είναι δυνατόν να οριστεί μια γραμμική ροή στον $\mathbb{R}^n$, που ορίζεται ως

$$\phi_t(\mathbf{x}) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}, \tag{1.5}$$

όπου

$$\exp(\mathbf{A}t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} \tag{1.6}$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η $\phi_t(\mathbf{x}) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}$ αντιστοιχεί στο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{Ax}$. Δηλαδή η

$$\mathbf{x}(t) \equiv \phi_t(\mathbf{x}_0) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}_0,$$

είναι λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ που διέρχεται από το σημείο $\mathbf{x}_0$ για $t = 0$ (αρχική συνθήκη $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$).

Ορισμός 1.5. *Η γραμμική ροή (1.5) λέγεται υπερβολική αν ο A δεν έχει ιδιοτιμές με μηδενικό πραγματικό μέρος.*

Αν η ροή (1.5) είναι υπερβολική, τότε ο $\mathbf{A}$ πρέπει να μην είναι ιδιάζων. Επομένως, η εξίσωση $\mathbf{Ax} = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση $\mathbf{x} = 0$. Άρα η αρχή είναι το μόνο στάσιμο σημείο της ροής. Σε αυτή την περίπτωση, τόσο το στάσιμο σημείο όσο και το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{Ax}$ λέγονται υπερβολικά.

Αν η γραμμική ροή (1.5) είναι υπερβολική, τότε ο εκθετικός πίνακας, $\exp(\mathbf{A}t)$ αναπαριστά έναν υπερβολικό γραμμικό διαφορομορφισμό για κάθε $t \neq 0$. Από τη σχέση (1.6) προκύπτει ότι ένα ιδιοδιάνυσμα του $\mathbf{A}$ με ιδιοτιμή λ είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του $\exp(\mathbf{A}t)$ με ιδιοτιμή $\exp(\lambda t)$. Αν η $\exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}$ είναι υπερβολική ροή και $Re\lambda_i \neq 0$ για κάθε i, θα έχουμε και $|\exp(\lambda_i t)| = \exp(Re\lambda_i t) \neq 1$, για όλα τα $t \neq 0$. 'Αρα ο διαφορομορφισμός $exp(\mathbf{A}t)$ θα είναι επίσης υπερβολικός. Από το θεώρημα 1.1 προκύπτει ότι ο $\mathbb{R}^n$ μπορεί να διασπαστεί στον ευσταθή E^s και τον ασταθή E^u υπόχωρο που συσχετίζεται φυσικά με την ροή: Συγκεκριμένα, $E^s(E^u)$ είναι το ευθύ άθροισμα των ιδιόχωρων που σχετίζονται με τις ιδιοτιμές του $\mathbf{A}$ για τις οποίες $Re\lambda_i < 0 (> 0)$. Μια γραμμική ροή $exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}$ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται συστολή(επέκταση), αν όλες οι ιδιοτιμές του $\mathbf{A}$ έχουν αρνητικά(θετικά) πραγματικά μέρη. Έτσι η $\exp(\mathbf{A}t)|E^s$ είναι συστολή και η $\exp(\mathbf{A}t)|E^u$ είναι επέκταση.

1.4 Υπερβολικά μη γραμμικά στάσιμα σημεία

Ένα μη γραμμικό δυναμικό σύστημα ορίζεται κατα κανόνα σε μια παραγωγίσιμη πολλαπλότητα. Ωστόσο ο τοπολογικός τύπος ενός στάσιμου σημείου ορίζεται από τον περιορισμό σε μια αρκούντως μικρή περιοχή γύρω από το στάσιμο σημείο. Αυτές οι γειτονιές μπορούν να επιλεχθούν ώστε να εδράζονται σε ένα διάγραμμα όπου ένας αντιπρόσωπος του συστήματος λαμβάνει μέρος. Είναι επομένως εύλογο να πάρουμε τους διαφορομορφισμούς και τις ροές να ορίζεται σε ανοιχτά σύνολα του $\mathbb{R}^n$. Αυτό απλοποιεί την γλώσσα που απαιτείται για να εκθέσουμε τα αποτελέσματα που απαιτούμε και παρέχει μια πιο πρακτική προσέγγιση στους υπολογισμούς.

Έστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$, και έστω $f : U \to \mathbb{R}^n$ μια απεικόνιση. Σημειώνουμε πως για κάθε $x \in u$ έχουμε ότι η $f(x)$ είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{R}^n$ έτσι ώστε να είναι μια n-άδα ή $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Οι συναρτήσεις $f_i(x)$ είναι οι συναρτήσεις βάσης της f.

Μπορούμε να γράψουμε τις μερικές παραγώγους της f εαν υπάρχουν. Είναι οι παράγωγοι

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \tag{1.7}$$

Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη κλάσσης C^1 η απλά η f είναι C^1 εάν όλες οι πρώτες μερικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι συνεχείς σε όλα τα σημεία του U. Λέμε ότι η f είναι λεία ή παραγωγίσιμη κλάσσης C^∞ εαν όλες οι μερικές παράγωγοι όλων των τάξεων υπάρχουν και είναι συνεχείς σε όλα τα σημεία του U

Ορισμός 1.6. *Ορίζουμε μια C^r m-πολλαπλότητα να είναι ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος με μια συλλογή διαγραμμάτων συντεταγμένων (U, θ) όπου θ είναι ένας ομοιομορφισμός από το U σε ένα ανοιχτό σύνολο του R^m.*

Ο ομοιομορφισμός θ_U μας δίνει για κάθε σημείο $y \in U$ ένα σύνολο συντεταγμένων, για αυτό και οι συναρτήσεις θ_U λέγονται συναρτήσεις συντεταγμένων. Οι συναρτήσεις συντεταγμένων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μεταφέρουν δραστηριότητες που λαμβάνουν χώρα σε μια οι περισσότερες πολλαπλότητες σε δραστηριότητες που λαμβάνουν μέρος σε έναν ή περισσότερους Ευκλείδειους χώρους.

Στην πραγματικότητα μπορεί να υπάρχουν πολλές συναρτήσεις συντεταγμένων με το ίδιο πεδίο ορισμού. Θεωρούμε τρεις συνθήκες στην συλλογή των διαγραμμάτων συντεταγμένων

- Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων συντεταγμένων σχηματίζουν ένα ανοιχτό σύνολο του M
- Οι καλυπτώμενες απεικονίσεις θα είναι C^r
- Η συλλογή των διαγραμμάτων συντεταγμένων θα είναι μεγιστική με βάση τις δύο πρώτες συνθήκες. Η συλλογή αυτή λέγεται η διαφορική δομή της πολλαπλότητας

Υπάρχει μια κατηγορία της οποίας τα αντικείμενα είναι C^R πολλαπλότητες και της οποίας οι μορφισμοί είναι C^r συναρτήσεις. Οι κατηγορικοί ισομορφισμοί λέγονται C^r διαφορομορφισμοί. Είναι μορφισμοί στην κατηγορία και έχουν αντίστροφους σε αυτήν. Αυτή είναι μεγαλύτερη απαίτηση από το να απαιτείται απλώς ο μορφισμός να έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Είναι εύκολο να δούμε ότι τα στάσιμα σημεία και οι περιοδικές τροχιές ανήκουν στο Ω, ωστόσο υπάρχουν σημεία που εμφανίζουν ασθενέστερες μορφές περιοδικότητας. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε μια φανταστική περιστροφή του κύκλου S^1. Κανένα από τα σημεία του κύκλου δεν είναι περιοδικό, αλλά η τροχιά κάθε σημείου $\mathbf{x}$ τελικά προσεγγίζει το $\mathbf{x}$. Οπότε κάθε σημείο του S^1 είναι ένα μη περιπλανώμενο σημεία και $\Omega = S^1$.

1.5 Αναλλοίωτα σύνολα

Μερικές φορές η τροχιά ενός σημείου του f ή της ϕ παραμένει μέσα σε μια συγκεκριμένη περιοχή του πορτραίτου φάσεων για όλα τα $m \in \mathbb{Z}$ ή για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Ένα σύνολο $\Lambda \subseteq M$ λέγεται ότι είναι αναλλοίωτο υπό την επήρεια του διαφορομορφισμού f (ή της ροής ϕ) αν $f^m(\mathbf{x}) \in \Lambda$ ($\phi_t(\mathbf{x}) \in \Lambda$) για κάθε $\mathbf{x} \in \Lambda$ και για όλα τα $m \in \mathbb{Z}$ ($t \in \mathbb{R}$). Γράφουμε

$$f^m(\Lambda) \subseteq \Lambda \ \text{ Για όλα τα } \ m \in \mathbb{Z}, \tag{1.8}$$

$$\phi_t(\Lambda) \subseteq \Lambda \ \text{ Για όλα τα } \ t \in \mathbb{R}, \tag{1.9}$$

Τα αναλλοίωτα σύνολα λέγονται θετικά (ή αρνητικά) αναλλοίωτα αν οι τροχιές των στοιχείων τους παραμένουν στο εσωτερικό τους για κάθε $m \in \mathbb{Z}^+(\mathbb{Z}^-)$ ή για κάθε $t \geq 0 (t \leq 0)$.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα αναλλοίωτων συνόλων είναι τα στάσιμα σημεία οι οριακοί κύκλοι και οι κλειστές περιοδικές τροχιές. Τα αναλλοίωτα σύνολα έχουν δυο σημαντικές ιδιότητες

1. Είναι δυνατόν να έχουν μια ιδιότητα ελαχίστου με την έννοια ότι είναι δυνατόν να μην έχουν υποσύνολα τα οποία είναι επίσης αναλλοίωτα. Για παράδειγμα ο οριακός κύκλος β είναι ένα ένα αναλλοίωτο σύνολο και για τις δύο ροές που φαίνονται στην εικόνα 1.5. Σε αντίθεση με την ροή (α) ο κύκλος β έχει αναλλοίωτα υποσύνολα $N_1, N_2, \Gamma_1, \Gamma_2$ τα οποία είναι επίσης αναλλοίωτα.

2. Είναι δυνατόν να εμφανίζουν περιοδικότητα (όπως ένα περιοδικό σημείο ή μια περιοδική τροχιά). Στις φυσικές εφαρμογές, τέτοια σύνολα ανταποκρίνονται διάφορα παρατηρήσιμα περιοδικά φυσικά φαινόμενα.

3. Είναι δυνατόν να εμφανίζουν ιδιότητες «επαναληπτικότητας» (recurrence) που σε μια πρώτη περιγραφή, μπορούμε να πούμε ότι είναι μια έννοια ασθενέστερη της περιοδικότητας. Μια τέτοια ιδιότητα επαναληπτικότητας, παρουσιάζουν τα λεγόμενα *μη-περιπλανώμενα σημεία* για τα οποία δίνουμε τον ορισμό.

Ορισμός 1.7. *Έστω $f : M \to M$ ένας διαφορομορφισμός. Ένα σημείο $\mathbf{x}$ είναι ένα μη-περιπλανώμενο (nonwandering) σημείο για τον διαφορομορφισμό f (ή της ροής ϕ) αν για κάθε γειτονιά W του $\mathbf{x}$, υπάρχει $m > 0 (t^* > 0)$ για τα οποίο το $f^m(W) \cup W (\phi_t(W) \cup W,\ t \geq t^*)$ δεν είναι κενό. Ένα σημείο $\mathbf{x}$ το οποίο δεν είναι μη-περιπλανώμενο, καλείται περιπλανώμενο (wandering). Είναι δηλαδή ένα σημείο για το οποίο υπάρχει γειτονιά W έτσι ώστε $f^m(W) \cup W = \varnothing\ (\phi_t(W) \cup W = \varnothing)$ για κάθε $m > 0\ (t > 0)$.*

Το σύνολο όλων των μη περιπλανώμενων σημείων για τον f (ή τη ροή ϕ) λέγεται συχνά μη περιπλανώμενο σύνολο και συμβολίζεται με $\Omega(f)\ \big(\Omega(\phi)\big)$ ή απλά Ω.

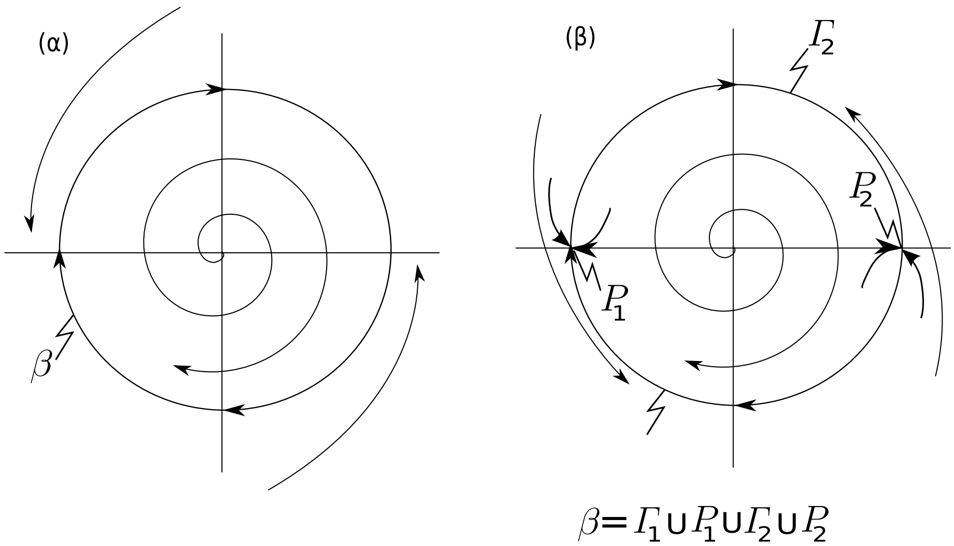
Θα ορίσουμε δυο σημαντικά σύνολα, είναι τα λεγόμενα οριακά σύνολα. Τα σύνολα αυτά, περιγράφουν για παράδειγμα την ιδέα, ότι τα στάσιμα σημεία και οι κλειστές τροχιές ελκύουν η απωθούν τις τροχιές που ξεκινούν από διαφορετικά σημεία του πορτραίτου φάσεων.

Ορισμός 1.8. *Ένα σημείο $\mathbf{y} \in M$ λέγεται ότι είναι ένα $\begin{cases} a- \\ \omega- \end{cases}$ οριακό σημείο της τροχιάς του f (ή της ροής ϕ) του $\mathbf{x}$, αν υπάρχει μια ακολουθία $m_i\ (t_i) \to \begin{cases} -\infty \\ +\infty \end{cases}$ τέτοια ώστε $\lim_{i\to+\infty} f^{m_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}(lim_{i\to+\infty}\phi_{t_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{y})$. Το σύνολο όλων των $\begin{cases} a- \\ \omega- \end{cases}$ οριακών σημείων του $\mathbf{x}$ είναι γνωστό ως το $\begin{cases} a- \\ \omega- \end{cases}$ οριακό σύνολο και συμβολίζεται με $\begin{cases} L_a(\mathbf{x}) \\ L_\omega(\mathbf{x}) \end{cases}$.*

Είναι δυνατόν να δειχθεί ότι τα οριακά σύνολα είναι αναλλοίωτα και επιπλέον ότι είναι υποσύνολα του Ω.

1.6 Συζυγία

Κεντρικό ρόλο στην συζήτηση της έννοιας της δομικής ευστάθειας, έχει η έννοια της συζυγίας. Η έννοια αυτή μας επιτρέπει να αναγνωρίσουμε πότε δύο διαφορομορφισμοί ή δύο ροές παρουσιάζουν την «ίδια» συμπεριφορά.



Σχήμα 1.2: Ο κύκλος B είναι ένα αναλλοίωτο υποσύνολο και για τις δύο ροές που φαίνονται στο σχήμα. Ωστόσο στην (α) ο B δεν έχει υποσύνολα που είναι αναλλοίωτα, ενώ στην (β) ο B είναι ένωση των αναλλοίωτων συνόλων $P_1, P_2, \Gamma_1, \Gamma_2$

Ορισμός 1.9. *Δύο διαφορομορφισμοί $f, g : M \to M$ λέγονται τοπολογικά (ή C^0-) συζυγείς αν υπάρχει ένας διαφορομορφισμός $\mathbf{h} : M \to M$ τέτοιος ώστε*

$$\mathbf{h} \cdot f = g \cdot \mathbf{h} \tag{1.10}$$

Η τοπολογική συζυγία δύο ροών $\phi_t, \psi_t : M \to M$ ορίζεται παρόμοια με τον ορισμό 1.9 και τη σχέση (1.10), αντικαθιστώντας τον f με ϕ_t και τον g με ψ_t, για όλα τα $t \in \mathbb{R}$. Ο ορισμός 1.9 σημαίνει ότι ο $\mathbf{h}$ «φέρνει» κάθε τροχιά του f(ή της ϕ_t) σε μια τροχιά του g (της ψ_t). Δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις,

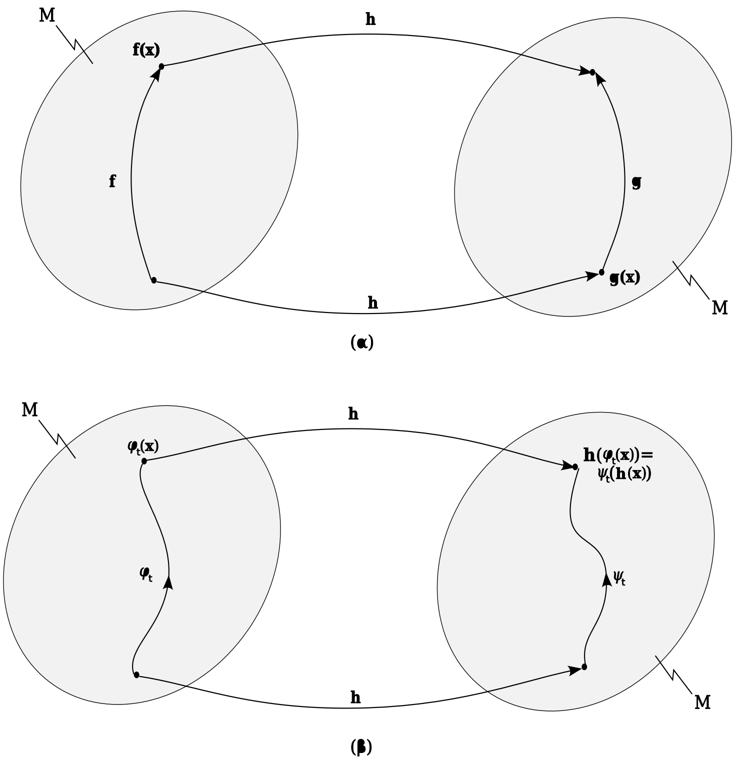
$$f^m(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathbf{h}} g^m(\mathbf{h}(\mathbf{x})), \ \ \text{για κάθε } \ m \in \mathbb{Z}, \tag{1.11}$$

και για τις ροές

$$\phi_t(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathbf{h}} \psi_t(\mathbf{h}(\mathbf{x})), \ \ \text{για κάθε } \ t \in \mathbb{R}. \tag{1.12}$$

Η σημασία των σχέσεων (1.11) και (1.12) απεικονίζεται στο σχήμα 1.6. Σημειώνουμε ότι από την μοναδικότητα των τροχιών της κάθε ροής, μια τροχιά της ροής ϕ_t απεικονίζεται σε μια και μόνο μια τροχιά της ψ_t και αντίστροφα.

Στην περίπτωση που δυο ροές είναι τοπολογικά συζυγείς και *ο ομοιομορφισμός* $\mathbf{h}$, *διατηρεί και τον προσανατολισμό των τροχιών, οι ροές ονομάζονται τοπολογικά ισοδύναμες*. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει ο ορισμός 1.9 και επιπλέον



Σχήμα 1.3: Διάγραμμα που μας δείχνει την έννοια της συζυγίας: (α) διαφορομορφισμών (β) ροών. Σημειώνουμε πως το (α) είναι αληθές για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ και το (β) για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Ο ορισμός 1.9 δηλώνει ότι $\mathbf{h}(f^m(\mathbf{x})) = g^m(\mathbf{h}(\mathbf{x}))$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$.

για κάθε $\mathbf{x} \in M$ να υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ έτσι ώστε αν $0 < |s| < t < \delta$ και το s είναι τέτοιο ώστε

$$\phi_s(\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\psi_t(\mathbf{x})),$$

να ισχύει $s > 0$.

Ως παράδειγμα, αναφέρουμε ότι οι γραμμικές υπερβολικές ροές μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε ένα πεπερασμένο αριθμό τύπων χρησιμοποιώντας την έννοια της τοπολογική ισοδυναμίας. Μπορεί να δειχθεί ότι δύο υπερβολικές γραμμικές ροές $\phi_t(\mathbf{x}) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}$ και $\psi_t(\mathbf{x}) = \exp(\mathbf{B}t)\mathbf{x}$ είναι τοπολογικά ισοδύναμες αν $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ έχουν τον ίδιο αριθμό ιδιοτιμών με αρνητικό πραγματικό μέρος. Συγκεκριμένα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.2. *Θεωρούμε το σύστημα $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ το οποίο ορίζει μια υπερβολική γραμμική ροή στον $\mathbb{R}^n$ με $\dim E^s = n_s$ και $\dim E^u = n_u$ Τότε η ροή του συστήματος $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ είναι τοπολογικά ισοδύναμη με τη ροή που ορίζεται από το σύστημα*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_s &= -\mathbf{x}_s, \qquad \mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^{n_s}, \\ \dot{\mathbf{x}}_u &= \mathbf{x}_u, \qquad \mathbf{x}_u \in \mathbb{R}^{n_u}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Ένα ανάλογο αποτέλεσμα με το θεώρημα 1.2 ισχύει για υπερβολικούς γραμμικούς διαφορομορφισμούς.

Ας θεωρήσουμε πρώτα ένα γραμμικό διαφορομορφισμό $\mathbf{A}$ με ευσταθή (ασταθή) υπόχωρο $E^s_{\mathbf{A}}$ ($E^u_{\mathbf{A}}$). Ορίζουμε $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}|E^i_{\mathbf{A}}, i = s, u$. Τότε θα λέμε πώς ο $\mathbf{A}_i$ διατηρεί (αντιστρέφει) τον προσανατολισμό αν $\det\mathbf{A}_i > 0(\det\mathbf{A}_i < 0)$.

Θεώρημα 1.3. *Έστω $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ υπερβολικοί γραμμικοί διαφορομορφισμοί. Τότε οι $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ είναι τοπολογικά συζυγείς αν και μόνο αν:*

- *$dimE^s_{\mathbf{A}} = dimE^s_{\mathbf{B}}$ (ή ισοδύναμα $dimE^u_{\mathbf{A}} = dimE^u_{\mathbf{B}}$).*
- *Για $i = s, u$ ο $\mathbf{A}_i$ και ο $\mathbf{B}_i$ είτε και οι δυο διατηρούν τον προσανατολισμό ή και οι δυο αντιστρέφουν τον προσανατολισμό.*

Αυτό το αποτέλεσμα τονίζει μια ενδιαφέρουσα διαφορά μεταξύ διαφορομορφισμών και ροών. Η υπερβολική γραμμική ροή $\exp(\mathbf{A}t)$ έχει την ιδιότητα ότι η $\exp(\mathbf{A}t)|E^i$, $i = s, u$ διατηρεί τον προσανατολισμό για όλα τα t. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η γραμμική ροή σαγματικού τύπου: Υπάρχει όσον αφορά την τοπολογική ισοδυναμία, μία μόνο ροή σαγματικού τύπου στο επίπεδο. Από την άλλη μεριά, για τους υπερβολικούς γραμμικοί διαφορομορφισμούς στο επίπεδο, το θεώρημα 1.3 προβλέπει υπάρχουν τέσσερις τοπολογικά διακεκριμένοι σαγματικοί τύποι που αντιστοιχούν στους $\mathbf{A}_s$ και $\mathbf{A}_u$, καθένας από τους οποίους είτε διατηρεί είτε αντιστρέφει τον προσανατολισμό. Γενικά το θεώρημα 1.3 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δειχθεί ότι υπάρχουν $4n$ τοπολογικοί τύποι υπερβολικών γραμμικών διαφορομορφισμών στον $\mathbb{R}^n$.

Κεφάλαιο 2

Δομική Ευστάθεια

Σε αυτό το κεφάλαιο θα κάνουμε μια εισαγωγή στην έννοια της δομικής ευστάθειας. Θα ξεκινήσουμε από την πιο απλή περίπτωση, αυτή των των γραμμικών συστημάτων. Στην συνέχεια θα εξετάσουμε κάτω από ποιες συνθήκες ένα σύστημα είναι δομικά ευσταθές (σε υποσύνολα γύρω από τα κρίσιμα σημεία του και κατάλληλες τροχιές) και τέλος κάτω από ποιες συνθήκες το σύστημα είναι δομικά ευσταθές για όλο το πεδίο ορισμού του.

2.1 Δομική ευστάθεια γραμμικών συστημάτων

Έστω $L(\mathbb{R}^n)$ το σύνολο όλων των γραμμικών μετασχηματισμών $\mathbf{A}$ του $\mathbb{R}^n$ στον εαυτό του, εφοδιασμένο με μια νόρμα (των $n \times n$ πινάκων $\mathbf{A} = [a_{ij}]$). Μια $\varepsilon-$γειτονιά του $\mathbf{A}$ δίνεται από την $N_\varepsilon(\mathbf{A}) = \{\mathbf{B} \in L(\mathbb{R}^n) | \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\| < \varepsilon\}$. Κάθε $\mathbf{B} \in N_\varepsilon(\mathbf{A})$ λέγεται ότι είναι $\varepsilon-$ κοντά στο $\mathbf{A}$. Ο ορισμός ορισμό της δομικής ευστάθειας των γραμμικών ροών και των διαφορομορφισμών στον $\mathbb{R}^n$, έχει ως εξής.

Ορισμός 2.1. *Μια γραμμική ροή $exp(\mathbf{A}t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (ή ένας διαφορομορφισμός $\mathbf{A}$) λέγεται δομικά ευσταθής στον $L(\mathbb{R}^n)$ αν υπάρχει μια ε-γειτονιά του $\mathbf{A}$, $N_\varepsilon(\mathbf{A}) \subseteq L(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε για κάθε $\mathbf{B} \in N_\varepsilon(\mathbf{A})$, η γραμμική ροή $\exp(\mathbf{B}t)$ (ή ο διαφορομορφισμός $\mathbf{B}$) να είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την $\exp(\mathbf{A}t)$ (με τον διαφορομορφισμό $\mathbf{A}$).*

Τα γραμμικά δομικά ευσταθή συστήματα μπορούν να χαρακτηριστούν πλήρως με μια ικανή και αναγκαία συνθήκη.

Πρόταση 2.1. *Μια γραμμική ροή ενός διαφορομορφισμού στον $\mathbb{R}^n$ είναι δομικά ευσταθής στον $L(\mathbb{R}^n)$ αν και μόνο αν είναι υπερβολική.*

Απόδειξη. Μια γραμμική ροή $exp(\mathbf{A}t)$ είναι υπερβολική αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{A}$ έχουν μη μηδενικά πραγματικά μέρη. Οι ιδιοτιμές ενός $\varepsilon -$ κοντινού πίνακα $\mathbf{B}$ διαφέρουν από αυτές του $\mathbf{A}$ κατά $O(\varepsilon)$. Έτσι για ε αρκετά μικρό μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι οι ιδιοτιμές το $\mathbf{B}$ είναι αρκετά κοντά με αυτές του $\mathbf{A}$, ώστε τα πραγματικά μέρη τους να μην είναι μηδενικά. Επίσης οι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ θα έχουν τον ίδιο αριθμό $n_s(n_u)$ ιδιοτιμών με αρνητικά (θετικά) πραγματικά μέρη. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 1.2 οι ροές $exp(\mathbf{A}t)$ και $exp(\mathbf{B}t$, θα πρέπει να είναι και οι δύο ισοδύναμες με την ροή του $\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}, \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{y}$, όπου $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_s}$ και $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_u}$. Επομένως το $\mathbf{A}$ είναι δομικά ευσταθές.

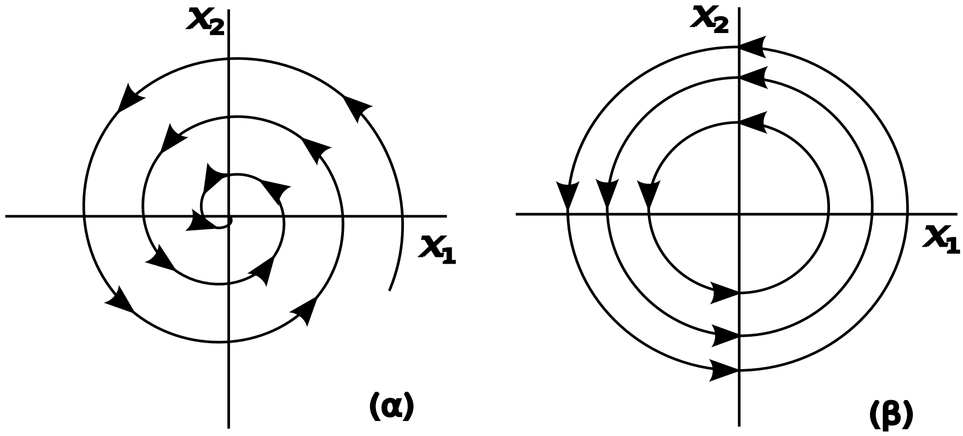
Ας υποθέσουμε τώρα ότι η ροή $\exp(\mathbf{A}t)$ είναι δομικά ευσταθής αλλά δεν είναι υπερβολική. Τότε ο $\mathbf{A}$ θα έχει τουλάχιστον μια ιδιοτιμή με μηδενικό πραγματικό μέρος. Ωστόσο $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I}$ είναι υπερβολικός για όλα τα $\varepsilon \neq 0$ και μπορεί να είναι για αρκετά κοντά στον $\mathbf{A}$ αν θεωρήσουμε το ε αρκετά μικρό. Επομένως η μη υπερβολική ροή $\exp(\mathbf{A}t)$ δεν είναι δομικά ευσταθής, άτοπο. 'Αρα αν η γραμμική ροή είναι δομικά ευσταθής πρέπει να είναι υπερβολική. □

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι ο ορισμός 2.1 ορίζει ουσιαστικά και τον χώρο στον οποίο πρέπει να ανήκουν οι διαταραχές (τον χώρο των γραμμικών συστημάτων $L(\mathbb{R}^n)$). Επίσης είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι ένα συγκεκριμένο σύστημα μπορεί να είναι δομικά ευσταθές ανάλογα την επιλογή του χώρου. Για παράδειγμα έστω $CL(\mathbb{R}^2) \subset L(\mathbb{R}^2)$ να είναι το υποσύνολο όλων των γραμμικών μετασχηματισμών με φανταστικές μη μηδενικές ιδιοτιμές. Α ο $\mathbf{A} \in CL(\mathbb{R}^2)$, είναι δομικά ευσταθής στον $CL(\mathbb{R}^2)$ αλλά δομικά ασταθής στον $L(\mathbb{R}^2)$: αν $\mathbf{B} \in CL(\mathbb{R}^2)$ είναι ε-κοντά στον $\mathbf{A}$, τότε ο $\mathbf{B}$ έχει καθαρά φανταστικές ιδιοτιμές που είναι αριθμητικά κοντά με αυτές του $\mathbf{A}$. Έτσι οι ροές $\exp(\mathbf{A}t)$ και $\exp(\mathbf{B}t)$ είναι τύπου κέντρου και επομένως τοπολογικά ισοδύναμες. Επομένως ο $\mathbf{A}$ είναι δομικά ευσταθής στον $CL(\mathbb{R}^2)$. Το ότι ο $\mathbf{A} \in CL(\mathbb{R}^2)$ δεν είναι δομικά ευσταθής στον $L(\mathbb{R}^2)$ (σχήμα 2.1), προκύπτει φυσικά από την πρόταση 2.1.

Η σχέση μεταξύ υπερβολικών και δομικά ευσταθών ροών στον $L(\mathbb{R}^2)$ μας επιτρέπει να δείξουμε ότι η «δομική ευστάθεια μιας ροής» είναι γενική ιδιότητα των γραμμικών μετασχηματισμών. Το γεγονός αυτό περιγράφεται από την επόμενη πρόταση Συμβολίζουμε με $SF(\mathbb{R}^n) \subseteq L(\mathbb{R}^n)$, το σύνολο των γραμμικών μετασχηματισμών που μας δίνουν δομικά ευσταθείς ροές στον $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 2.2. *Το σύνολο $SF(\mathbb{R}^n)$ είναι ανοιχτό και πυκνό στον $L(\mathbb{R}^N)$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι το $SF(\mathbb{R}^n)$ είναι ανοικτό. Πράγματι, από τον ορισμό 2.1 , κάθε $\mathbf{A} \in SF(\mathbb{R}^n)$ ανήκει σε μια ε-γειτονιά, $N_\varepsilon(\mathbf{A})$ τοπολογικά ισοδύναμων ροών. Επειδή η $N_\varepsilon(\mathbf{A})$ είναι ανοιχτή, κάθε ένα από τα στοιχεία της πρέπει να είναι επίσης δομικά ευσταθές δηλ. $N_\varepsilon(\mathbf{A}) \in SF(\mathbb{R}^n)$. Επομένως το $SF(\mathbb{R}^n)$ είναι ανοιχτό ως ένωση ανοιχτών συνόλων.



Σχήμα 2.1: Η ροή στο (α) είναι μια διαταραχή του κέντρου (β), στον $L(\mathbb{R}^2)$ αλλά δεν είναι στοιχείο του $CL(\mathbb{R}^2)$. Για μια αρκούντως ασθενή σπείρα, η (α) μπορεί να πλησιάσει την (β) στον $L(\mathbb{R}^2)$.

Από την πρόταση 2.1 έπεται ότι $SF(\mathbb{R}^n) = HF(\mathbb{R}^n)(\subset L(\mathbb{R}^n))$, το σύνολο των γραμμικών μετασχηματισμών που δίνουν υπερβολικές ροές στον $\mathbb{R}^n$. Ωστόσο το $HF(\mathbb{R}^n)$ είναι ένα πυκνό υποσύνολο του $L(\mathbb{R}^n)$. Για να το δείξουμε ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό μετασχηματισμό $\mathbf{A} \in L(\mathbb{R}^n)$ έτσι ώστε $\mathbf{A} \notin HF(\mathbb{R}^n)$. Τότε υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $\mathbf{B}$, ο $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I}$ ο οποίος είναι αρκετά κοντά στον $\mathbf{A}$ τέτοιος ώστε η $\exp(\mathbf{B}t)$ να είναι υπερβολική. Έτσι κάθε στοιχείο του $L(\mathbb{R}^n)$ είναι αρκούντως κοντά στα σημεία του $HF(\mathbb{R}^n)$ και όπως είπαμε $HF(\mathbb{R}^n) = SF(\mathbb{R}^n)$. 'Αρα το $SF(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνό στον $L(\mathbb{R}^N)$. □

2.2 Τοπική Δομική Ευστάθεια

Ένα σημαντικό συμπέρασμα της συζήτησης για τα γραμμικά συστήματα είναι ότι οι υπερβολικές ροές και διαφορομορφισμοί διατηρούν την ποιοτική τους δομή κάτω από την επίδραση μικρών γραμμικών διαταραχών. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να επεκταθεί σε ροές ή διαφορομορφισμούς ορισμένους σε μια γειτονιά υπερβολικών στάσιμων σημείων σε μη γραμμικά συστήματα. Φυσικά πρέπει να επιλέξουμε μια κατάλληλη κλάση διαταραχών και να αποσαφηνίσουμε πότε είναι μικρές χρησιμοποιώντας κατάλληλη νόρμα και απόσταση.

'Εστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Vec}^1(U)$ το σύνολο όλων των C^1 διανυσματικών πεδίων ορισμένων στο U. Εφοδιάζουμε το σύνολο $\mathrm{Vec}^1(U)$ με τη λεγόμενη C^1-norm $\|\cdot\|_1$ όπου

$$\|X\|_1 = \sup_{\mathbf{x}\in U}\left\{\sum_{i=1}^{n}|X^i(\mathbf{x})| + \sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial X^i(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right|\right\} \tag{2.1}$$

Έτσι αν $X(\mathbf{x}) = (X^1(\mathbf{x}), ..., X^n(\mathbf{x}))^T$, τότε το X θεωρείται «μικρό» όταν η $\|X\|_1$ είναι μικρή για όλα τα $\mathbf{x} \in U$. Ορίζουμε τώρα την

$$N_\varepsilon(X) = \left\{Y \in \mathrm{Vec}^1(U) \quad : \quad \|X - Y\|_1 < \varepsilon\right\},$$

να είναι η ε γειτονιά του X στο $\mathrm{Vec}^1(U)$. Λέγοντας ότι το $Y \in N_\varepsilon(X)$ εννοούμε ότι το Y είναι $\varepsilon - C^1$-κοντά στο X ή διαφορετικά, ότι το Y είναι μια $\varepsilon - C^1$-διαταραχή του X.

Ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1. *Έστω $f : U \to \mathbb{R}^n$, ένα C^r διανυσματικό πεδίο και $\mathbf{x}^* \in U$ ένα στάσιμο σημείο της $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ τέτοιο ώστε το $Df(\mathbf{x}^*) \in L(\mathbb{R}^n)$ να είναι αντιστρέψιμο. Τότε υπάρχει μια γειτονιά $V \subset U$ του $\mathbf{x}^*$ και μια γειτονιά $N \subset \mathrm{Vec}^1(U)$ του f τέτοια ώστε για κάθε $g \in N$ να υπάρχει ένα μοναδικό στάσιμο σημείο $\mathbf{y}^* \in V$ του $\dot{\mathbf{y}} = g(\mathbf{y})$. Επιπλέον για κάθε $\epsilon > 0$, μπορούμε να επιλέξουμε την N έτσι ώστε $||\mathbf{y}^* - \mathbf{x}^*|| < \epsilon$.*

Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να εφαρμοστεί στην ειδική περίπτωση που το $\mathbf{x}^*$ είναι υπερβολικό στάσιμο σημείο, δηλαδή οι ιδιοτιμές του $Df(\mathbf{x}^*)$ έχουν μη μηδενικά πραγματικά μέρη. Σε αυτή την περίπτωση ορίζεται ο δείκτης $\mathrm{ind}(\mathbf{x}^*)$ του $\mathbf{x}^*$ ως ο αριθμός των ιδιοτιμών του $Df(\mathbf{x}^*)$ με αρνητικά πραγματικά μέρη. Με τη βοήθεια το δείκτη, το θεώρημα 2.1 είναι δυνατόν να αναδιατυπωθεί ως εξής.

Θεώρημα 2.2. *Έστω $\mathbf{x}^*$ ένα υπερβολικό στάσιμο σημείο, όπως στο θεώρημα 2.1. Τότε οι περιοχές V και N μπορούν να επιλεχθούν έτσι ώστε αν $g \in N$, το μοναδικό υπερβολικό σημείο $\mathbf{y}^* \in V$, του $\dot{\mathbf{y}} = g(\mathbf{y})$ να είναι υπερβολικό και ίδιου δείκτη με το $\mathbf{x}^*$.*

Η απόδειξη του θεωρήματος 2.1 βασίζεται στο παρακάτω αποτέλεσμα σχετικά με τις C^1 απεικονίσεις.

Πρόταση 2.3. *Έστω ότι η $f : U \to \mathbb{R}^n$ είναι C^1, και υποθέτουμε ότι το $\mathbf{x}_0 \in U$ είναι τέτοιο ώστε ο $Df(\mathbf{x}_0) \in L(\mathbb{R}^n)$ να είναι αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει μια γειτονιά $N \subset Vec^1(U)$ της f και μια γειτονιά $V \subset U$ του $\mathbf{x}_0$ τέτοια ώστε αν $g \in N$, να ισχύει ότι*

1. *Η $g \mid V$ είναι ένα προς ένα και*
2. *$f(\mathbf{x}_0) \in g(V)$*

Το θεώρημα 2.1 προκύπτει από την πρόταση 2.3, θέτοντας $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^*$. Ισχύει $f(\mathbf{x}^*) = 0$ και από τα 1. και 2. της πρότασης 2.3 θα πρέπει να ισχύει $g(\mathbf{y}^*) = 0$ για ένα μοναδικό $\mathbf{y}^* \in V$. Για να δείξουμε ότι $|\mathbf{y}^* - \mathbf{x}^*| < \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$, αν η N επιλεγεί κατάλληλα, αντικαθιστούμε το U με το ανοικτό

$$U_0 = \{x \in U \quad : \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \epsilon\}.$$

Τότε εφαρμόζοντας ξανά την πρόταση 2.3 , μπορούμε να επιλέξουμε την γειτονιά N έτσι ώστε το $\mathbf{y}^*$ να είναι στο U_0 για κάθε $g \in N$.

Για την απόδειξη της πρότασης, θα χρειαστούμε δυο λήμματα. Το πρώτο είναι το ακόλουθο.

Λήμμα 2.1. *Υποθέτουμε ότι η η $f : U \to \mathbb{R}^n$, ικανοποιεί τις υποθέσεις της πρότασης 2.3. Έστω $B \subset U$ να είναι μια ανοιχτή μπάλα γύρω από το x_0 τέτοια ώστε για κάθε $\mathbf{y} \in B$ ο $Df(\mathbf{y})$ να είναι αντιστρέψιμος. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι*

1. $\|Df(\mathbf{y})^{-1}\| < \nu$, *για κάθε* $\mathbf{y} \in B$
2. $\|Df(\mathbf{y}) - Df(\mathbf{x})\| < 1/\nu$, *για κάθε* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B$.

για κάποιο $\nu > 0$. Τότε η $f|B$ είναι ένα προς ένα.

Απόδειξη. Θεωρούμε $\mathbf{y} \in B$ και $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ μη μηδενικό. Τότε το $\mathbf{u}$ μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{u} = Df(\mathbf{y})^{-1}(Df(\mathbf{y})\mathbf{u}). \tag{2.2}$$

Από την (2.2), έχουμε ότι

$$||\mathbf{u}|| \leq \|Df(\mathbf{y})^{-1}\| \, \|Df(\mathbf{y})\mathbf{u}\|. \tag{2.3}$$

Έτσι από την συνθήκη 1 και την (2.3), προκύπτει ότι

$$\|Df(\mathbf{y})\mathbf{u}\| > \frac{\|\mathbf{u}\|}{\nu} \tag{2.4}$$

Τώρα ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ είναι διακεκριμένα σημεία της B. θεωρούμε το $\mathbf{u} = \mathbf{z} - \mathbf{y}$. Σημειώνουμε ότι αφού η B είναι μια μπάλα, ισχύει $(1-t)\mathbf{y} + t\mathbf{u} \in B$ για κάθε $t \in [0, 1]$. Ορίζουμε την C^1 απεικόνιση $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ από τη σχέση

$$\phi(t) = f((1-t)\mathbf{y} + t\mathbf{u}). \tag{2.5}$$

Από την (2.5), έχουμε ότι

$$\phi(0) = f(\mathbf{y}), \phi(1) = f(\mathbf{u}). \tag{2.6}$$

Εφαρμόζοντάς τον κανόνα της αλυσίδας στην (2.5), θα έχουμε

$$\phi'(t) = Df((1-t)\mathbf{y} + t\mathbf{u})\mathbf{u}. \tag{2.7}$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.6), (2.7), έχουμε

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{y}) &= \int_0^1 Df(\mathbf{y} + t\mathbf{u})\mathbf{u}dt \qquad (2.8) \\ &= \int_0^1 Df(\mathbf{y})\mathbf{u}dt + \int_0^1 \left[Df((1-t)\mathbf{y} + t\mathbf{u}) - Df(\mathbf{y})\right]\mathbf{u}dt. \end{aligned}$$

Επομένως, από την (2.8),

$$\|f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{y})\| \geq \|Df(\mathbf{y})\mathbf{u}\| - \int_0^1 \|Df((1-t)\mathbf{y} + t\mathbf{u}) - Df(\mathbf{y})\|\|\mathbf{u}\|dt. \tag{2.9}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τη συνθήκη 2 του λήμματος και την 2.4, προκύπτει από την (2.9) ότι

$$\|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{z})\| > \frac{\|\mathbf{u}\|}{\nu} - \frac{\|\mathbf{u}\|}{\nu} = 0. \tag{2.10}$$

Έτσι, από την (2.10) έχουμε $f(\mathbf{y}) \neq f(\mathbf{z})$. □

Το δεύτερο λήμμα διατυπώνεται ως εξής.

Λήμμα 2.2. *Υποθέτουμε ότι ο $\mathbb{R}^n$ είναι είναι εφοδιασμένος με νόρμα που προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο. με νόρμα η οποία ορίζεται μέσω εσωτερικού γινομένου. Υποθέτουμε ότι η $f : U \to \mathbb{R}^n$ μια C^r απεικόνιση. Έστω $\overline{B} \subset U$ η κλειστή μπάλα γύρω από κάποιο $\mathbf{x}_0 \in U$ και ∂B το σύνορο της. Υποθέτουμε ότι το $Df(\mathbf{y})$ είναι αντιστρέψιμο για όλα τα $\mathbf{y} \in \overline{B}$ και επιπλέον ότι*

$$\min_{\mathbf{y} \in \partial B} \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0)\| > 2\delta > 0, \tag{2.11}$$

για κάποιο $\delta > 0$. Τότε αν

$$\|\mathbf{w} - f(\mathbf{x}_0)\| < \delta,$$

θα έχουμε ότι $\mathbf{w} \in f(B)$.

Απόδειξη. Αφού η $\overline{B}$ είναι συμπαγής, υπάρχει $\mathbf{y}_0 \in \overline{B}$ για το οποίο η συνάρτηση

$$\begin{aligned} H &: \overline{B} \to \mathbb{R}, \\ H(\mathbf{y}) &= \frac{1}{2}\|f(\mathbf{y}) - \mathbf{w}\|^2 \end{aligned}$$

παίρνει ελάχιστη τιμή. Σημειώνουμε ότι το $\mathbf{y}_0$ δεν μπορεί να είναι σημείο του συνόρου ∂B. Παρατηρούμε ότι για $\mathbf{y} \in \overline{B}$ ισχύει λόγω της (2.11) ότι

$$\|f(\mathbf{y}) - \mathbf{w}\| \geq \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0)\| - \|f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{w}\| > 2\delta - \delta.$$

Επομένως έχουμε

$$\|f(\mathbf{y}) - w\| > \delta > \|f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{w}\|. \tag{2.12}$$

Από την (2.12) προκύπτει ότι $H(\mathbf{y}_0)$ δεν μπορεί να είναι ελάχιστο αν $\mathbf{y}_0 \in \partial B$.

Αφού η νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ προέρχεται από ένα εσωτερικό γινόμενο η συνάρτηση

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2,$$

είναι παραγωγίσιμη Η παράγωγος στο $\mathbf{x}$ είναι η γραμμική απεικόνιση

$$\mathbf{z} \to < \mathbf{x}, \mathbf{z} > .$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας, η H είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγός της στο $\mathbf{y}_0$ είναι η γραμμική απεικόνιση

$$\mathbf{z} \to DH(\mathbf{y}_0)\mathbf{z} = < f(\mathbf{y}_0) - \mathbf{w}, Df(\mathbf{y}_0)\mathbf{z} > \tag{2.13}$$

Αφού το $\mathbf{y}_0$ είναι κρίσιμο σημείο της H και το $\mathbf{y}_0$ είναι εσωτερικό σημείο της $\overline{B}$, $DH(\mathbf{y}_0) = 0$. Επιπλέον, αφού το $Df(\mathbf{y}_0)$ είναι αντιστρέψιμο, υπάρχει $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$Df(\mathbf{y}_0)\mathbf{z} = f(\mathbf{y}_0) - \mathbf{w}. \tag{2.14}$$

Τότε, από τις (2.13) και (2.14),

$$\begin{aligned} 0 &= DH(\mathbf{y}_0)\mathbf{z} \\ &= < f(\mathbf{y}_0) - \mathbf{w}, f(\mathbf{y}_0) - \mathbf{w} > \\ &= \|f(\mathbf{y}_0) - \mathbf{w}\|^2. \end{aligned}$$

Επομένως $f(\mathbf{y}_0) = \mathbf{w}$. □

Σημειώνουμε ότι ουσιαστικά δείξαμε ότι ότι

$$\mathbf{w} \in f(B). \tag{2.15}$$

Μπορούμε τώρα να σκιαγραφήσουμε την απόδειξη της πρότασης 3.3. Είναι δυνατόν να δειχθεί ότι το υποσύνολο των αντιστρέψιμων γραμμικών πινάκων στον $L(\mathbb{R}^n)$ είναι ανοιχτό. Επομένως υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε ο $A \in L(\mathbb{R}^n)$ να είναι αντιστρέψιμος αν

$$\|A - Df(\mathbf{x}_0)\| < a.$$

Αφού η απεικόνιση $x \to Df(\mathbf{x})$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει μια γειτονιά $U_1 \subset U$ του $\mathbf{x}_0$ τέτοια ώστε αν $\mathbf{x} \in U_1$, τότε

$$\|A - Df(\mathbf{x})\| < a. \tag{2.16}$$

Έπεται ότι αν $g \subset \mathrm{Vec}^1(U)$ είναι τέτοιο ώστε

$$\|Dg(\mathbf{x}) - Df(\mathbf{x})\| < \frac{a}{2} \tag{2.17}$$

για όλα τα $\mathbf{x} \in U_1$, τότε ο $Dg(\mathbf{x})$ είναι αντιστρέψιμος για όλα τα $x \in U_1$. Το σύνολο τέτοιων g αποτελεί μια γειτονιά $N_1 \subset \mathrm{Vec}^1(U)$ του f. Στη συνέχεια, επιλέγουμε μια γειτονιά $U_2 \subset U_1$ του $\mathbf{x}_0$ έτσι ώστε να μπορούμε να βρούμε μια γειτονιά $N_2 \subset N_1 \subset \mathrm{Vec}^1(U)$ του f, τέτοια ώστε αν $g \in N_2$ και $\mathbf{y} \in U_2$, να ισχύει

$$\|Dg(\mathbf{y})^{-1}\| < \nu, \tag{2.18}$$

για κάποιο $\nu > 0$. Σκοπεύοντας στη χρήση του λήμματος 3.1, συνεχίζουμε βρίσκοντας μικρότερες περιοχές $N_3 \subset N_2 \subset \mathrm{Vec}^1(U)$ του f και $U_3 \subset U_2$ του $\mathbf{x}_0$ τέτοιες ώστε αν $g \in U_3$ και $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in N_3$, ώστε να ισχύει επιπλέον ότι

$$\|Dg(\mathbf{y}) - Dg(\mathbf{z})\| < \frac{1}{\nu}, \tag{2.19}$$

Με τις (2.18) και (2.19) στη διάθεση μας, μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα 3.1., από το οποίο έπεται ότι ότι για κάθε ανοικτή μπάλα γύρω από το $\mathbf{x}_0$, $B \subset U_3$ και για κάθε $g \in N_3$, η $g|B$ είναι ένα προς ένα.

Για να εφαρμόσουμε τώρα το λήμμα 3.2, θεωρούμε την κλειστή μπάλα $\overline{B} \subset U$ γύρω από το $\mathbf{x}_0$ (δηλαδή την μπάλα B που μόλις αναφέραμε μαζί με το σύνορό της) και επιλέγουμε $\delta > 0$ όπως στο λήμμα 3.2. Μπορούμε να βρούμε τώρα μια γειτονιά $N \subset N_3$ τέτοια ώστε αν $g \in N$, να ισχύει

$$\min_{\mathbf{y} \in \partial B} \|g(y) - g(x_0)\| > 2\delta > 0.$$

Συνεπάγεται ότι αν $\|\mathbf{w} - g(\mathbf{x}_0)\| < \delta$ και $g \in N$ τότε $\mathbf{w} \in g(B)$. Η πρόταση τώρα αποδείχθηκε θεωρώντας ως N τη γειτονιά που μόλις αναφέραμε ποιο πάνω και παίρνοντας ως V την $V = B$.

Μπορεί να αποδειχθεί, με χρήση του Θεωρήματος 3.1 και με τη βοήθεια των συναρτήσεων Liapunov, η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.4. *Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $\mathbf{0} \in U$ το ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, όπου το $f : U \to \mathbb{R}^n$, είναι C^1-διανυσματικό πεδίο. Υποθέτουμε επιπλέον, ότι για το σύστημα $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, υπάρχει μια συνάρτηση Liapunov ορισμένη στο U. Τότε υπάρχει μια* *γειτονιά $U_0 \subset U$ του $\mathbf{0}$, τέτοια ώστε για κάθε $\epsilon > 0$, να υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι C^1 και $\|g(t, \mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\| < \delta$ για όλα τα $(t, x) \in \mathbb{R} \times U_0$ να ισχύει το εξής: Κάθε λύση $\mathbf{x}(t)$ της $\dot{\mathbf{x}} = g(t, \mathbf{x})$ με αρχική συνθήκη $\mathbf{x}(t_0) \in U_0$ είναι τέτοια ώστε $\mathbf{x}(t) \in U_0$ για κάθε $t > t_0$. Επιπλέον, υπάρχει $t_1 > t_0$,τέτοιο ώστε $\|\mathbf{x}(t)\| < \epsilon$ για κάθε $t > t_1$.*

Το αποτέλεσμα της πρότασης 3.4, ουσιαστικά αποτελεί ένα αποτέλεσμα τοπικής ασυμπτωτικής δοκιμής ευστάθειας, καθώς περιγράφει την κλάση των διαταραχών, υπό την επίδραση των οποίων, η αρχή παραμένει ασυμπτωτικά ευσταθής.

2.3 Αντοχή Κλειστών Τροχιών

Στην ενότητα αυτή, θα αναφέρουμε με συντομία κάποια αποτελέσματα, που αφορούν την δομική ευστάθεια κλειστών τροχιών ή αλλιώς για την αντοχή των κλειστών τροχιών κάτω από την επίδραση διαταραχών.

Θεωρούμε μια ροή ϕ_t που ορίζεται από ένα C^1 διανυσματικό πεδίο $f : U \to \mathbb{R}^n$ όπου $U \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα ανοιχτό σύνολο. Θεωρούμε ότι υπάρχει μια κλειστή τροχιά $\gamma \subset U$ με περίοδο $\lambda > 0$. Για την ευκολία μας θεωρούμε ότι η αρχή των αξόνων $\mathbf{0}$ είναι σημείο από το οποίο διέρχεται η γ. Μπορεί να αποδειχθεί το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.3. *Έστω $u : S_0 \to S$ μια απεικόνιση Poincaré για έναν τοπικό τομέα S του $\mathbf{0}$, με $S_0 \subseteq S$. τέτοιο ώστε η κλειστότητα του S_0 να είναι συμπαγές υποσύνολο του S. Έστω $V \subset U$ μια γειτονιά της κλειστής τροχιάς γ. Υποθέτουμε ότι το 1 δεν είναι ιδιοτιμή του $Du(\mathbf{0})$. Τότε υπάρχει μια γειτονιά $N \subset \mathrm{Vec}^1(U)$ του f τέτοια ώστε κάθε διανυσματικό πεδίο $g \in N$ να έχει μια κλειστή τροχιά $\beta \subset V$.*

Σημειώνουμε ότι η συνθήκη αναφέρεται στην απεικόνιση Poincaré. Δεν είναι γνωστή κάποια ισοδύναμη συνθήκη στο διανυσματικό πεδίο f.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κλειστότητα του S_0 είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του S. Έστω $\alpha > 0$. Υπάρχει $\delta_0 > 0$ τέτοιο ώστε εαν $g \in N$ και $|g(x) - f(x)| < \delta_0$ για όλα τα $x \in S_0$, τότε, ο S θα είναι ένας τοπικός τομέας γύρω από το 0 για το g, και υπάρχει μια C^1 απεικόνιση $\sigma : S_0 > R$ τέτοια ώστε

$$|\sigma(x) - r(x)| < a, \psi_{\sigma(x)} \in S \tag{2.20}$$

και

$$|psi_{sigma(x)} - u(x)| < \alpha \tag{2.21}$$

όπου $\psi_{sigma(x)}$ είναι η ροή της g. Θέτουμε

$$\psi_{sigma(x)} = \upsilon(x) \tag{2.22}$$

Τότε

$$\upsilon : S_0 \to S \tag{2.23}$$

είναι μια C^1 απεικόνιση η οποία είναι ένα είδους απεικόνισης Poincare για την ροή ψ_t

Δοσμένου οποιουδήποτε $t_0 > 0$ οποιουδήποτε συμπαγούς συνόλου $K \in U$ και οποιουδήποτε $\ni > 0$ μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι

$$\|D\phi_t(x) - D\psi_t(x)\| < \ni \tag{2.24}$$

για όλα τα $t \in [-t_0, t_0], x \in K$, εφόσον εξασφαλίσουμε ότι $\|g\text{ﬄ}f\|_1$ είναι αρκούντως μικρό. Αυτό προκύπτει από την συνέχει των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων ως συναρτήσεις των αρχικών δεδομένων και αρχικών συνθηκών και την έκφραση των $\frac{\partial \psi_t(x)}{\partial x}$ ως λύσεις της μη αυτόνομου εξίσωσης στον $L(E)$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = Dg(y(t))\mathbf{A}(t) \tag{2.25}$$

όπου $y' = g(y)$

Έτσι εφόσον $\|g\text{ﬄ}f\|_1$ είναι αρκούντως μικρό μπορούμε να κάνουμε τα $|u(x) - \upsilon(x)|$ και $\|Du(x) - D\upsilon(x)\|$ όσο μικρά θέλουμε για όλα τα $x \in S_0$

Ένα στάσιμο σημείο $x = \upsilon(x)$ του υ εδράζεται σε μια κλειστή τροχιά της ροής $\psi_t(x)$. Βλέπουμε αυτό το στάσιμο σημείο ως το μηδενικό σημείο της C^1 απεικόνισης

$$\eta : S_0 \to H, \eta(x) = \upsilon(x) - x, \tag{2.26}$$

όπου H είναι το υπερεπίπεδο που περιέχει τον S. Έστω $\xi : S_0 \to H$ μια C^1 απεικόνιση

$$\xi(x) = \upsilon(x) - x \tag{2.27}$$

τέτοια ώστε $\xi(0) = 0$. Τώρα έχουμε

$$D\xi(0) = D\upsilon(0) - I \tag{2.28}$$

όπου $I : H \to H$ είναι η ταυτότητα. Αφού το 1 δεν είναι ιδιοτιμή της $D\upsilon(0)$ γνωρίζουμε ότι το 0 δεν είναι ιδιοτιμή της $D\xi(0)$, οπότε η $D\xi(0)$ είναι αντιστρέψιμη. Από την πρόταση στην παρακάτω ενότητα μπορούμε να βρούμε μια γειτονιά $\Pi \subset U(S_0)$, της ξ τέτοια ώστε κάθε απεικόνιση στην Π έχει ένα μοναδικό μηδενικό $y \in S_0$. Εαν το $\|g - f\|_1$ είναι αρκούντως μικρό τότε $\eta \in \Pi$. Επομένως η η έχει ένα μοναδικό μηδενικό $y \in S_0$ και το y εδράζεται σε μια κλειστή τροχιά β του g. Επιπλέον μπορούμε να κάνουμε το y τόσο μικρό στο 0 ώστε $\beta \subset U$. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα □

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα που προκύπτει σε σχέση με το θεώρημα 2.3, είναι το αν η κλειστή τροχιά για το διαταραγμένο σύστημα της οποίας η ύπαρξη εξασφαλίζεται από το θεώρημα, *είναι και μοναδική*.

Η απάντηση είναι ότι δεν είναι απαραίτητα μοναδική. Για την ακρίβεια είναι δυνατόν ότι όλα τα σημεία της V, να βρίσκονται σε κλειστές τροχιές του f. Επιπλέον είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι μπορεί να δειχθεί, ότι αυτές οι κλειστές τροχιές θα έχουν περιόδους μεγαλύτερες από αυτήν της γ.

Υπάρχει μια ειδική περίπτωση για την οποία η μοναδικότητα των κλειστών τροχιών του διαταραγμένου συστήματος μπορεί να εξασφαλιστεί: αν η τροχιά γ είναι ένας ελκυστής και το g είναι αρκετά κοντά στο f, τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι και η τροχιά β θα είναι επίσης π ελκυστής. Επομένως κάθε τροχιά η οποία ξεκινάει από κάποιο σημείο κοντά στη β, θα πρέπει να συγκλίνει στη β καθώς $t \to \infty$. Επομένως δεν μπορεί να είναι κλειστή τροχιά.

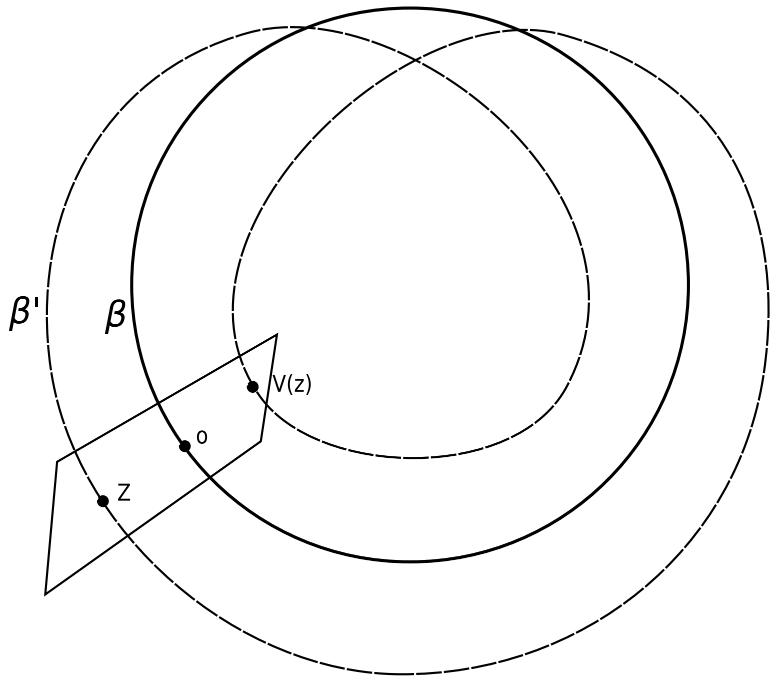
Μια άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση, είναι αυτή όπου η γ είναι υπερβολική κλειστή τροχιά. Αυτό σημαίνει ότι η παράγωγος στο $\mathbf{0} \in \gamma$ της απεικόνισης Poincare δεν έχει ιδιοτιμές μέτρου 1. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει ένα «ασθενέστερο είδος μοναδικότητας»: Συγκεκριμένα, υπάρχει μια γειτονιά $V \subset U$ της γ τέτοια ώστε αν η περιοχή N είναι αρκετά μικρή, κάθε $g \in N$ είναι τέτοιο ώστε να θα έχει μια μοναδική κλειστή τροχιά ώστε να περιέχεται εξόλοκλήρου στην V. Είναι πιθανόν ωστόσο για κάθε γειτονιά V μιας υπερβολικής κλειστής τροχιάς να τέμνεται με άλλες κλειστές τροχιές (ωστόσο αυτό είναι δύσκολο να το απεικονίσουμε).

Ολοκληρώνουμε αυτή τη σύντομη παράγραφο, διατυπώνοντας το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο περιγράφει τις κατάλληλες συνθήκες που πρέπει να ισχύουν ώστε τα σημεία ισορροπίας ή η περιοδική τροχιά ενός διαταραγμένου συστήματος να είναι υπερβολικού τύπου.

Θεώρημα 2.4. *Έστω $\overline{B} \subset \mathbb{R}^n$ μια κλειστή μπάλα και ∂B το σύνορο της. Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει την $\overline{B}$ και $f : U \to R^n$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο το οποίο δεν εφάπτεται στο ∂B σε κάθε σημείο του ∂B. Τότε για κάθε γειτονιά $N \subset Vec^1(U)$ του f. υπάρχει $g \in N$ τέτοιο ώστε αν αν $\mathbf{x} \in B$ είναι σημείο ισορροπίας του g, τότε το $\mathbf{x}$ είναι υπερβολικό. Επιπλέον, αν $\gamma \subset B$ είναι μια κλειστή τροχιά του g, τότε η γ είναι υπερβολική.*

2.4 Ολική δομική ευστάθεια

Οι δομικά ευσταθείς ροές σε πολλαπλότητες δύο διαστάσεων παρουσιάζουν μια ιδιαίτερη πολυπλοκότητα η οποία προκύπτει όταν θέλουμε να επεκτείνουμε την συζήτηση από την τοπική δομική ευστάθεια στην *ολική δομική ευστάθεια*. Στην προηγούμενη παράγραφο, είδαμε ότι η τοπολογική ισοδυναμία μεταξύ των διαταραγμένων και μη διαταραγμένων ροών μπορεί να εγγυηθεί σε μικρές γειτονιές



Σχήμα 2.2: Μια κλειστή τροχιά β' κοντά σε μια υπερβολική κλειστή τροχιά β

γύρω από τα στάσιμα σημεία και επίσης μικρές γειτονιές γύρω από τα διανυσματικά πεδία. Οι γειτονιές αυτές είναι αρκετά μικρά υποσύνολα του ανοιχτού συνόλου U στο οποίο το διανυσματικό πεδίο X ορίζεται ή και μικρά υποσύνολα του $\mathrm{Vec}^1(U)$. Η επεκτάσεις που αφορούν όλο το U ή όλο τον $\mathrm{Vec}^1(U)$ αφορούν την ολική δομική ευστάθεια ή απλά δομική ευστάθεια.

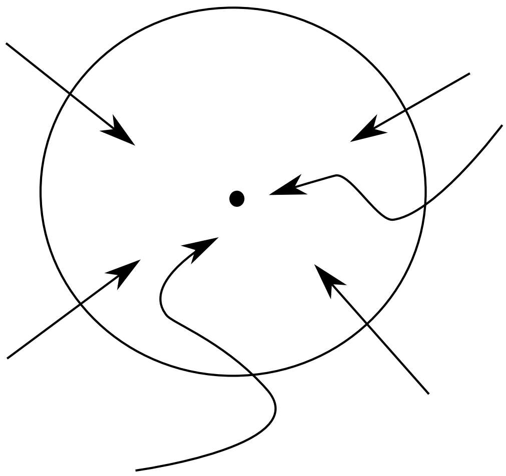
Η απλούστερη φυσικά περίπτωση, είναι αυτή των διανυσματικών πεδίων στο $\mathbb{R}^2$. Σε αυτή την περίπτωση, το απλούστερο αποτέλεσμα επέκτασης, αφορά την επέκταση της δομικής ευστάθειας όχι μόνο σε μια μικρή περιοχή γύρω από το σημείο ισορροπίας αλλά σε όλο το U και ενδεχομένως και στο σύνορο ∂U.

Θα αναφέρουμε ένα αποτέλεσμα όταν Έστω

$$\overline{U} = D^2 = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \;\;:\;\; \|x\| \leq 1\right\}.$$

Για να εξασφαλίσουμε ότι τα διανυσματικά πεδία είναι καλά ορισμένα στον D^2, θα θεωρήσουμε ότι ορίζονται σε κάποιο ανοιχτό σύνολο U το οποίο περιέχει το D^2 και στη συνέχειά τα περιορίζουμε στο D^2. Έστω $\mathrm{Vec}^1(D^2)$ το σύνολο όλων των C^1- διανυσματικών πεδίων X, που ορίζονται με αυτό τον τρόπο, εφοδιασμένο με την C^1 νόρμα. Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει ένα παράδειγμα μιας κλάσης δομικά ευσταθών συστημάτων.

Θεώρημα 2.5. *Έστω $f : U \to \mathbb{R}^2$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο σε ένα ανοιχτό σύνολο $U \supset D^2$, με τις παρακάτω ιδιότητες:*



Σχήμα 2.3: Ένα δομικά ευσταθές διανυσματικό πεδίο

1. *Το $f : U \to \mathbb{R}^2$ έχει ακριβώς ένα στάσιμο σημείο, το $\mathbf{0} \in D^2$, και το $\mathbf{0}$ είναι εστία.*

2. *Το f δείχνει προς το εσωτερικό του D^2 κατά μήκος του συνόρου ∂D^2 , δηλαδή $\langle f(x), x \rangle < 0$ για κάθε $x \in \partial D^2$*

3. *$\lim_{t\to\infty} \phi_t(x) = 0$ για όλα τα $x \in D^2$, όπου ϕ_t είναι η ροή που αντιστοιχεί στο διανυσματικό πεδίο f.*

Τότε η ροή που ορίζεται από το διανυσματικό πεδίο f είναι δομικά ευσταθής στο D^2.

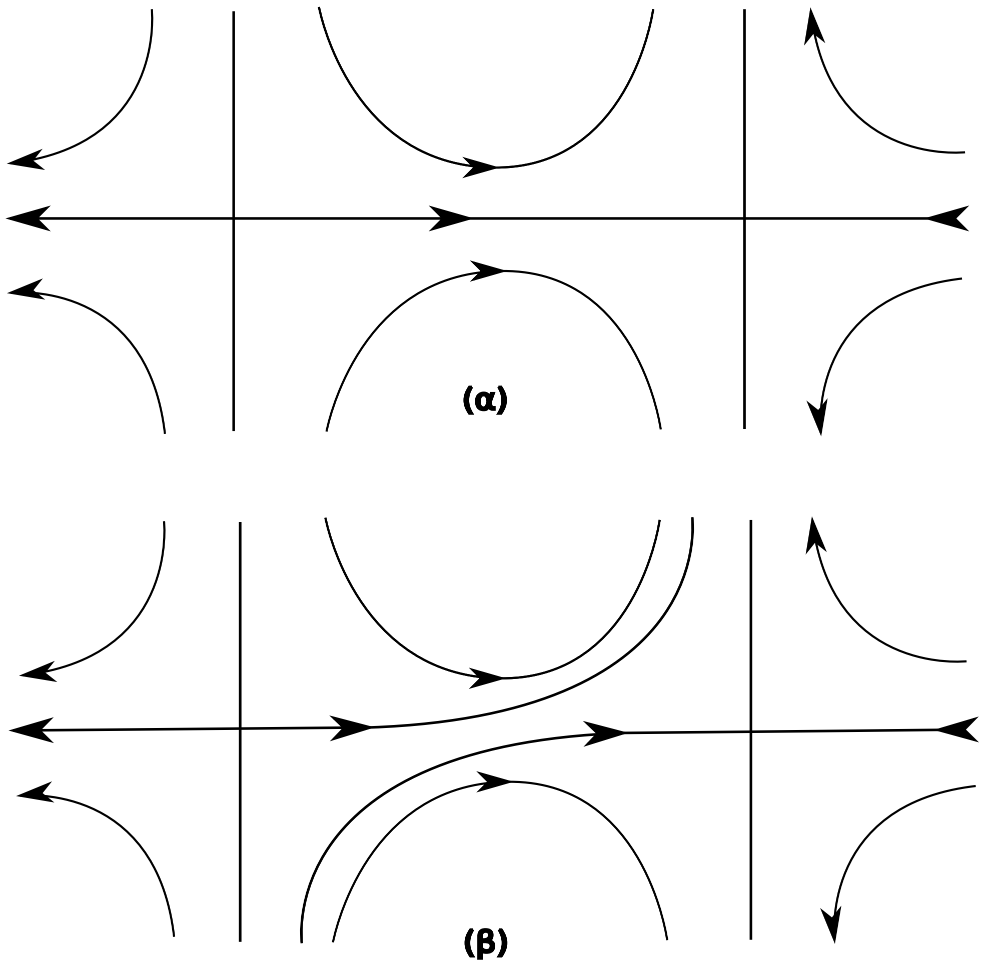
Θα αναφέρουμε τρία σημαντικά αποτελέσματα που αφορούν τη δομική ευστάθεια διανυσματικών πεδίων στο $\mathbb{R}^2$. Τα δυο πρώτα αφορούν C^1 διανυσματικά πεδία στο D^2. Το πρώτο μπορεί να βρεθεί στην εργασία πάνω στην δομική ευστάθεια των Pontryagin, Andronov, [1].

Θεώρημα 2.6. *Έστω ότι το f δείχνει στο εσωτερικό του D^2. Τότε οι παρακάτω συνθήκες ισοδυναμούν με την δομική ευστάθεια στον D^2*

1. *Τα στάσιμα σημεία στον D^2 είναι υπερβολικά.*

2. *Κάθε κλειστή τροχιά στον D^2 είναι είτε ελκυστής είτε περιοδική τροχιά.*

3. *Καμία τροχιά στον D^2 δεν πηγαίνει από σαγματικό σημείο σε σαγματικό σημείο.*



Σχήμα 2.4: (α) Η ροή γύρω από μια σαγματική ένωση (β) όταν σπάει η σαγματική ένωση

Η σημασία της τρίτης συνθήκης φαίνεται παραστατικά στο σχήμα 2.4.

Το παρακάτω αποτέλεσμα του Peixoto ενδυναμώνει το θεώρημα 2.6. Θεωρεί πως η δομική ευστάθειά στον D^2 είναι γενική ιδιότητα. Έστω $\mathrm{VecIn}^1(U)$ το σύνολο όλων των C^1 διανυσματικών πεδίων στον U τα οποία δείχνουν εσωτερικά κατα μήκος του ∂D^2.

Θεώρημα 2.7. *[2] Το σύνολο*

$$S = \{f \in VecIn^1(U) \| \eta f \text{είναι δομικά ευσταθής στον} D^2\} \tag{2.29}$$

είναι πυκνό και ανοιχτό. Δηλαδή, κάθε στοιχείο του S έχει μια γειτονιά στο $VecIn^1(U)$ που περιέχεται στο S, και κάθε ανοιχτό σύνολο στον $VecIn^1(U)$ περιέχει ένα διανυσματικό πεδίο, το οποίο είναι δομικά ευσταθές στον D^2.

Δυστυχώς έχει αποδειχτεί ότι δεν υπάρχει ανάλογο θεώρημα για διαστάσεις μεγαλύτερες του 2. Όπως και να χει υπάρχουν πολλά ενδιαφέροντα διανυσματικά πεδία που είναι δομικά ευσταθή, και το θέμα αυτό συνεχίζει να ερευνάται.

Υπάρχει όμως ένα ανάλογο θεώρημα για μεγαλύτερες διαστάσεις, αν θεωρήσουμε στον $U(D^n)$, το σύνολο $\mathrm{grad}(D^n)$ των βαθμωτών διανυσματικών πεδίων που δείχνουν εσωτερικά στον D^2.

Θεώρημα 2.8. *Το σύνολο όλων των δομικά ευσταθών συστημάτων που περιέχονται στον $grad(D^n)$ είναι ανοιχτό και πυκνό στον $grad(D^n)$*

Επιστρέφουμε στην απόδειξη του θεωρήματος 2.5. Περιγραφικά εξελίσσεται ως εξής. Ένα διανυσματικό πεδίο g αρκούντως κοντά στο f αποδεικνύεται ότι έχει ένα μοναδικό στάσιμο σημείο $\alpha \in D^2$ κοντά στο 0. Επιπλέον όλες οι τροχιές του g δείχνουν προς το α.

Πρόταση 2.5. *Έστω $0 \in E$ μια εστία ενός C^1 διανυσματικού πεδίου $f : U \to E$ όπου U είναι ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το 0. Υπάρχει ένα εσωτερικό γινόμενο στο E, ένας αριθμός $r > 0$ και μια γειτονιά $N \subset Vec^1(U)$ τέτοια ώστε το παρακάτω να ισχύει: Για κάθε $g \in N$ υπάρχει μια εστία $a = a(g)$ της g τέτοια ώστε το σύνολο*

$$B_r = x \in E \| |x| \leq r \tag{2.30}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 2.9. *Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η κλειστη μπάλα $B_\delta(0) \in W$, τότε για όλα τα $z = (x, y) \in C \cap B_\delta(0)$, υπάρχει ένα $\alpha > 0$ με $\langle f(z), z \rangle \geq \alpha |z|^2$*

δίνουμε στον E ένα εσωτερικό γινόμενο με την παρακάτω ιδιότητα. Για κάποια $\nu < 0$ και $2r > 0$ είναι αληθές ότι

$$\langle f(x), x \rangle < \nu |x|^2 \tag{2.31}$$

εαν $0 < |x| < 2r$. Έπεται ότι η B_r είναι περιοχή του 0 και η $f(x)$ προσανατολίζεται προς το εσωτερικό περί του ∂B_r . Είναι ξεκάθαρο ότι η f έχει μια γειτονιά $N_o \subset \mathrm{Vec}^1(U)$ τέτοια ώστε αν $g \in N_0$ τότε η $g(x)$ επίσης προσανατολίζεται στο εσωτερικό περί του ∂B_r. Έστω ένα $\varepsilon > 0$ και $s = r + \varepsilon$. Ιφ $|y| < \varepsilon$. Τότε η κλειστή μπάλα $B_\varepsilon(y)$ γύρω από το y ικανοποιεί την εξής σχέση

$$B_r \subset B_\varepsilon(y) \subset B_{2\varepsilon} \tag{2.32}$$

Έστω $\nu < \mu < 1$. Θεωρούμε ότι εαν $\|g - f\|_1$ είναι αρκούντως μικρό, τότε η εστία α της g θα είναι στην $B_{\varepsilon r}$ και επιπλέον,

$$\langle g(x), x - \alpha\rangle \leq \mu|x - \alpha|^2 \tag{2.33}$$

Εαν $x \in B_\varepsilon(a)$. Για να το δούμε αυτό, γράφουμε

$$\langle g(x), x{-}\alpha\rangle = \langle f(x{-}\alpha), x{-}\alpha\rangle + \langle g(x){-}f(x{-}\alpha), x{-}\alpha\langle \leq \nu|x{-}\alpha|^2 + |g(x){-}f(x{-}\alpha), x{-}\alpha\rangle \tag{2.34}$$

Η απεικόνιση $\alpha(x) = g(x) - f(x - a)$ εξαφανίζεται στο α. Η νόρμα της παραγώγου της στο x υπολογίζεται ως:

$$\|D\alpha(r)\| \leq \|Dg(x) - Df(x)\| + \|Df(x) - Df(x - \alpha) \tag{2.35}$$

όσο $\|g{-}g\|_1 \to 0.\|Dg(x){-}Df(x)\| \twoheadrightarrow 0$ για $|x| \leq 2r$; επίσης $x{-}\alpha \to 0$, οπότε $\|Df(x) - Df(x - a)\| \twoheadrightarrow 0$ για $|x| \leq 2r$.Έτσι εαν $\|g - f\|_1$ είναι αρκούντως μικρό, $\|D\alpha(x)\| \leq \mu - \nu$, και $\mu - nu$ είναι μια σταθερά Lipshitz για το α οπότε

$$|\alpha(x) = |\alpha(x) - \alpha(\alpha)| \leq (\mu - \nu)|x - \alpha \tag{2.36}$$

Συνεπώς εαν $\|g - f\|_1$ είναι αρκούντως μικρό, π.χ. μικρότερο από $\delta > 0$

$$\langle g(x), x{-}a\rangle \leq \nu|x{-}\alpha|^2 + \langle \alpha(x), x{-}a\rangle \leq \nu|x{-}\alpha|^2 + (\mu{-}\nu)|x{-}\alpha|^2 = \mu|x{-}\alpha|^2 \tag{2.37}$$

όπως προαπαιτείται Θέτουμε $N_1 = |g \in \mathrm{Vec}^1(U)|\|g - f\|_1 < \delta|$ και

$N = N_0 \cap N_1$.

Υποθέτουμε $g \in N$ με μια πηγή α. Από την 2.4 το σύνολο $B_e(\alpha)$ είναι στην λεκάνη του α. Εφόσον $B_r \subset B_e(\alpha)$ και η $g(x)$ δείχνει εσωτερικά γύρω από το ∂B_r η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Τώρα 8α αποδείξουμε το Θεώρημα. Αφού το D^n είναι συμπαγές, και η $f(x)$ δείχνει εσωτερικά περί του ορίου, καμία καμπύλη-λύση δεν μπορεί να φύγει από το D^n. Οπότε το D^n είναι θετικά αναλλοίωτο. Επιλέγουμε $r > 0$ και $N \subset \mathrm{Vec}^1(U)$ όπως στην πρόταση. Έστω $N_0 \subset N$ μια γειτονιά της f τόσο μικρή ώστε εαν $g \in N_0$, τότε η $g(x)$ δείχνει εσωτερικά περί του ∂D^n. Έστω ψ_1 η ροή της $g \in N_0$. Σημειώνουμε ότι το D^n είναι επίσης θετικά αναλλοίωτο για το ψ_1.

Για κάθε $x \in D^n - intB$ υπάρχει μια περιοχή $U_z \subset U$ του z και $t_x > 0$ τέτοιο ώστε εαν $y \in U_z$ και $t \geq t_x$ τότε

$$|\phi_t(y)| < r \tag{2.38}$$

Από την συμπάγεια του ∂D^n ένας πεπερασμένος αριθμός $U_{x_1}, ..., U_{x_k}$ των συνόλων U_x καλύπτουν το ∂D^n. Θέτουμε

$$t_0 = \max t_{x_1}, ..., t_{x_k} \tag{2.39}$$

Τότε $\phi_t(D^n - \mathrm{int}B_r) \subset B_r$ εαν $t \geq t_0$. Από την συνέχεια της ροής στην f έπεται ότι η f έχει μια γειτονιά $N_1 \subset N$ τέτοια ώστε αν $g \in N_1$ τότε

$$\psi_t(D^n - \mathrm{int}B_r) \subset B_r \quad \text{εαν} \quad t \geq t_0 \tag{2.40}$$

Το παραπάνω υπονοεί ότι

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t(x) = a \quad \text{για όλα} \quad x \in D^n \tag{2.41}$$

Όταν $x \in D^n$ τότε $y = \psi_{r0}(x)$, B_r ανήκει σε λεκάνη του a υπό την ψ_t.

Επίσης υπονοεί ότι κάθε $y \in D^n - \alpha$ είναι της μορφής $\psi_t(x)$ για κάποια $x \in \partial D^n$ και $t \geq 0$. Αλλιώς $L_\alpha(y)$ δεν είναι άδειος: αλλά εαν $z \in L_\alpha(y)$ τότε $\psi_t(z) \to \alpha$ όσο $t \to x$ οπότε $y = \alpha$.

Ορίζουμε $g \in N_1$ έχουμε αποδείξει ως τώρα ότι η απεικόνιση

$$\Psi : [0, \infty) \times \partial D^n \to D^n$$
$$\Psi(t, x) = \psi_t(x)$$

έχει $D^n - \alpha$ για την εικόνα της. Η εικόνα της απεικόνισης

$$\Phi[0, \infty) \times \partial D^n \to D^n$$
$$\Phi(x, t) = \phi_t(x)$$

είναι $D^n - 0$. Ορίζουμε

$$h : D^n \to D^n$$

$$h(y) = \begin{cases} \Psi\Phi^{-1}(y) & \text{εαν } y \neq 0 \\ \alpha & \text{εαν } y = 0 \end{cases} \tag{2.42}$$

Ένας άλλος τρόπος για να πούμε αυτό είναι ότι η h απεικονίζει την $\phi_t(x)$ στην $\psi_{t(x)}$ για $x \in \partial D^n, t0$, και $h(0) = a$ όποτε η h απεικονίζει τις τροχιές της ϕ σε τροχιές της ψ διατηρώντας τον προσανατολισμό. Ξεκάθαρα $h(D^n) = D^n$. Η συνέχεια της h επιβεβαιώνεται από την συνέχεια των ροών, και αναστρέφοντας τον ρόλο της ροής και της διαταραχής της παίρνουμε την αντίστροφη της h. Οπότε η h είναι ομοιομορφισμός. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

$\square$

Ολοκληρώνουμε τη σύντομη αναφορά μας στην έννοια της δομικής ευστάθειας διατυπώνοντας το περίφημο θεώρημα του Peixoto [2]. Η πρώτη εκδοχή αφορά τα διανυσματικά πεδία κλάσης $\mathrm{VecIn}^1(U)$. Δείχνει πως η δομική ευστάθεια στο D^2 είναι γενική ιδιότητα κ Συμβολίζουμε με $\mathrm{VecIn}^1(U)$ το σύνολο όλων των C^1 διανυσματικών πεδίων στο U τα οποία δείχνουν στο εσωτερικό του D^2 κατά μήκος του ∂D^2 (βλ. συνθήκη 2, θεώρημα 2.6).

Θεώρημα 2.10 (Peixoto). *Ένα διανυσματικό πεδίο στον είναι δομικά ευσταθές αν και μόνο αν η ροή του ικανοποιεί τις παρακάτω προϋποθέσεις*

1. *Όλα τα στάσιμα σημεία είναι υπερβολικά.*

2. *Όλες οι κλειστές τροχιές είναι υπερβολικές.*

3. *Δεν υπάρχουν τροχιές που ενώνουν σαγματικά σημεία.*

Επιπλέον, το σύνολο

$$S = \{f \in \mathrm{VecIn}^1(U) \quad : \quad f \textit{είναι δομικά ευσταθές στον} D^2\},$$

είναι ανοιχτό και πυκνό στον $\mathrm{VecIn}^1(U)$. *Δηλαδή, για κάθε στοιχείο f του S υπάρχει μια ανοικτή μπάλα στον $VecIn^1(U)$ που περιέχεται στο S, και κάθε ανοιχτή μπάλα στον $VecIn^1(U)$ όσο μικρή και αν είναι, περιέχει διανυσματικά πεδία, τα οποίο είναι δομικά ευσταθή στον D^2.*

Δυστυχώς έχει αποδειχτεί ότι δεν υπάρχει ανάλογο θεώρημα για διαστάσεις μεγαλύτερες του 2. Ωστόσο, γενικεύεται στην περίπτωση πολλαπλοτήτων 2 διαστάσεων.

Θεώρημα 2.11 (Peixoto). *Θεωρούμε ότι M είναι μια 2-διαστάσεων συμπαγής πολλαπλότητα, χωρίς σύνορο. Ένα διανυσματικό πεδίο στον $\mathtt{Vec}^1(M)$ είναι δομικά ευσταθές αν και μόνο αν η ροή του ικανοποιεί τις παρακάτω προϋποθέσεις*

1. *Όλα τα στάσιμα σημεία είναι υπερβολικά.*

2. *Όλες οι κλειστές τροχιές είναι υπερβολικές.*

3. *Δεν υπάρχουν τροχιές που ενώνουν σαγματικά σημεία.*

4. *Το μη-περιπλανώμενο σύνολο αποτελείται μόνο από στάσιμα σημεία και περιοδικές τροχιές.*

Επίσης αν η M είναι προσανατολίσιμη, το σύνολο των δομικά ευσταθών C^1- διανυσματικών πεδίων,αποτελεί ένα ανοιχτό και πυκνό υποσύνολο του $\mathtt{Vec}^1(M)$.

Σημειώνουμε ότι η M λέγεται προσανατολίσιμη, όταν δύο διακεκριμένες πλευρές του M μπορούν να αναγνωριστούν. Η σφαίρα και ο τόρος είναι τα χαρακτηριστικά παραδείγματα προσανατολίσιμων πολλαπλοτήτων

Η πρόταση του θεωρήματος 2.11 περιέχει τη συνθήκη (iv) η οποία έχει πολύ σημαντικό ρόλο και δεν περιλαμβάνεται στην απλούστερη εκδοχή 2.10. Για παράδειγμά, Θεωρούμε την άρρητη (irrational) ροή στον τόρο T^2. Αυτή η ροή ικανοποιεί τις συνθήκες (i)-(iii). Δεν υπάρχουν στάσιμα σημεία, κλειστές τροχιές η σαγματικές ενώσεις. Ωστόσο δεν ικανοποιεί την συνθήκη (iv) επειδή το μη-περιπλανώμενο σύνολο είναι όλο το T^2. Επομένως η ακανόνιστη ροή δεν είναι δομικά ευσταθής στον T^2. Από την άλλη μεριά, υπάρχουν $\varepsilon - C^1$ κοντινές ρητές ροές για τις οποίες κάθε τροχιά είναι κλειστή.

Πρέπει να σημειωθεί ότι αν η M είναι συμπαγής, οι ροές έχουν πεπερασμένο αριθμό στάσιμων σημείων και περιοδικών τροχιών, αν όλα τα σημεία και όλες οι τροχιές είναι υπερβολικές. Πράγματι, σύμφωνα με το θεώρημα Hartman η ροή σε μια γειτονιά ενός υπερβολικού στάσιμου σημείου είναι τοπολογικά ισοδύναμη με αυτή της γραμμικοποίησης της γύρω από το σημείο αυτό. 'Ομως η τελευταία έχει ένα απομονωμένο στάσιμο σημείο στην αρχή. Επομένως τα υπερβολικά σημεία πρέπει να είναι απομονωμένα. Αυτό σημαίνει ότι τα στάσιμα σημεία δεν μπορούν να συσσωρεύονται σε ένα υπερβολικό στάσιμο σημείο. Συνεπώς μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός στάσιμων σημείων μπορούν να εμφανιστούν σε μια συμπαγή πολλαπλότητα, αν όλα είναι υπερβολικά.

Θα μπορούσαμε να επεκτείνουμε την συζήτηση της δομικής ευστάθειας ή αστάθειας για μη συμπαγείς υπόχωρους όπως για παράδειγμα όλο το επίπεδο· *Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να θέσουμε το εξής ερώτημα αυτή τη φορά ως προς τη δομική αστάθεια*: Θα μπορούσε ένα διανυσματικό πεδίο που είναι δομικά ασταθές σε έναν συμπαγή υπόχωρο του επιπέδου, να είναι δομικά ασταθές για όλο το επίπεδο; Αυτή η προσέγγιση έχει πρακτική αξία αφού στις εφαρμογές δεν εμπλεκόμαστε με μεταβλητές που εκτείνονται στο άπειρο, αλλά μπορούν να γίνουν πολύ μεγάλες ωστόσο πεπερασμένες. Το παρακάτω παράδειγμα περιγράφει την ιδέα.

Θα δείξουμε ότι το διανυσματικό πεδίο f, των διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - x^3 \\ \dot{y} &= -y + xy \end{aligned} \tag{2.43}$$

δεν είναι δομικά ευσταθές σε οποιοδήποτε συμπαγές υποσύνολο του επιπέδου που περιέχει την ευθύγραμμη τροχιά που ενώνει τα σημεία ισορροπίας του f .

Πράγματι, το σύστημα (2.43) έχει σαγματικά σημεία στο $\mathbf{x}^* = (0,0)$ και $\mathbf{y}^* = (2,0)$. Στον x-άξονα, $\dot{y} = 0$ και έτσι υπάρχει μια τροχιά που συνδέει αυτά τα υπερβολικά στάσιμα σημεία. Έστω D ένα οποιοδήποτε συμπαγές σύνολο που περιέχει την τροχιά που συνδέει τα $\mathbf{x}^*$ $\mathbf{y}^*$. Σημειώνουμε ότι η ευσταθής πολλαπλότητα του $\mathbf{x}^*$ είναι η γραμμή $x = 0$ ενώ η γραμμή $x = 2$ είναι η ασταθής πολλαπλότητα του $\mathbf{y}^*$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν σημεία $\mathbf{x}$ στο σύνορο του D για τα οποία το $f(\mathbf{x})$ δείχνει στο εσωτερικό του D (συγκεκριμένα, τα σημεία τομής της $x = 0$ με το σύνορο του D) και άλλα σημεία στο σύνορο του D για τα οποία το $f(\mathbf{x})$ δείχνει στο εξωτερικό του D (συγκεκριμένα, τα σημεία τομής της $x = 2$ με το σύνορο του D). Επομένως δεν είμαστε σε θέση να εφαρμόσουμε το θεώρημα 2.10.

Ωστόσο για να μελετήσουμε το σύστημα θα θεωρήσουμε την διαταραχή

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - x^2 \\ \dot{y} &= -y + xy + \mu(2x - x^2), \quad \mu > 0. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Το διανυσματικό πεδίο του (2.44) μπορεί να γίνει $\varepsilon - C^1$-κοντινό με το (2.43) σε ένα οποιοδήποτε υποσύνολο D του τύπου που περιγράφτηκε παραπάνω παίρνοντας μ αρκετά μικρό. Τα σημεία $(0, 0)$ και $(2, 0)$ είναι σαγματικά για όλα τα πραγματικά $\mu > 0$. 'Ομως για μη μηδενικό $\mu, \dot{y} \neq 0$ στον x-άξονα ανάμεσα σε αυτά τα σημεία. Επιπλέον, η ευσταθής πολλαπλότητα στο $(2, 0)$, μπορεί να δειχθεί ότι αυτή τη φορά, εφάπτεται στην $y = \frac{2}{3}\mu x$. Επομένως για $\mu > 0$ δεν υπάρχει σύνδεση μεταξύ σαγματικών στάσιμων σημείων. Επομένως οι ροές για $\mu = 0$ και $\mu > 0$ είναι τοπολογικά διαφορετικές. Το διανυσματικό πεδίο του 2.43 είναι επομένως δομικά ασταθές σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του επιπέδου που περιέχει τις σαγματικές ενώσεις.

Θα κλείσουμε με ένα δεύτερο παράδειγμα το οποίο υποδεικνύει ότι αν ένα διανυσματικό πεδίο είναι δομικά ευσταθές σε τυχαία μεγάλα συμπαγή υποσύνολα του επιπέδου δεν είναι απαραίτητα δομικά ευσταθές σε όλο το επίπεδο.

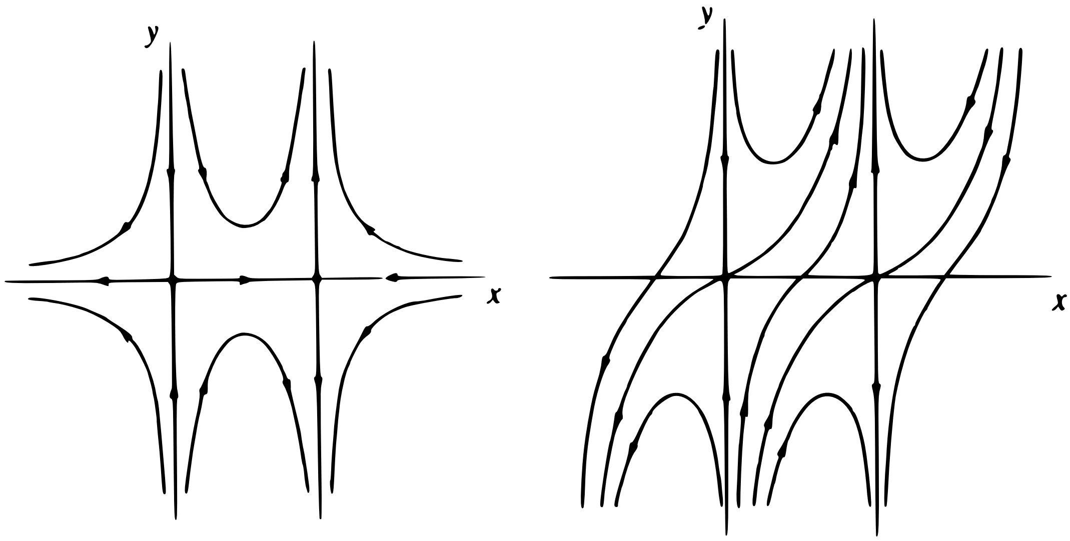
Θα δείξουμε ότι υπάρχουν τυχαία μεγάλα συμπαγή υποσύνολα του επιπέδου στα οποία το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= \sin(\pi y) \exp(-y^2) \end{aligned} \tag{2.45}$$

είναι δομικά ευσταθές. Θα επιβεβαιώσουμε όμως ότι ο τοπολογικός τύπος του 2.45 σε όλο το επίπεδο αλλάζει με την προσθήκη διαταραχής $(0, \mu)$ στο $(\dot{x}, \dot{y})$.

Το (2.45) έχει στάσιμα σημεία τα $(\dot{y}, y) = (0, p), p \in \mathbb{Z}$. και μπορεί να δειχθεί ότι τα στάσιμα σημεία είναι εναλλακτικά ευσταθείς κόμβοι και σαγματικά σημεία. Ας υποθέσουμε ότι το D είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, του οποίου το σύνορο τέμνει τον y-άξονα στο $(0, y_l), (0, y_u)$ με $y_l < y_u$ και $y_l, y_u \neq p$ για ένα οποιοδήποτε ακέραιο p. Εάν το D είναι τέτοιο ώστε $\dot{y}(y_l) > 0$ και $\dot{y}(y_u) < 0$ τότε η (2.45) είναι δομικά ευσταθής στον σύμφωνα με το θεώρημα 2.10. Με αυτό τον τρόπο, μπορούν να κατασκευαστούν τυχαία μεγάλα D.

Ας θεωρήσουμε την οικογένεια των διαταραγμένων διανυσματικών πεδίων



Σχήμα 2.5: Τα πορτραίτα φάσεων των (α)2.43 (β)2.44 με $\mu > 0$

που ορίζονται από την $\dot{\mathbf{x}} = f_\mu(\mathbf{x})$,

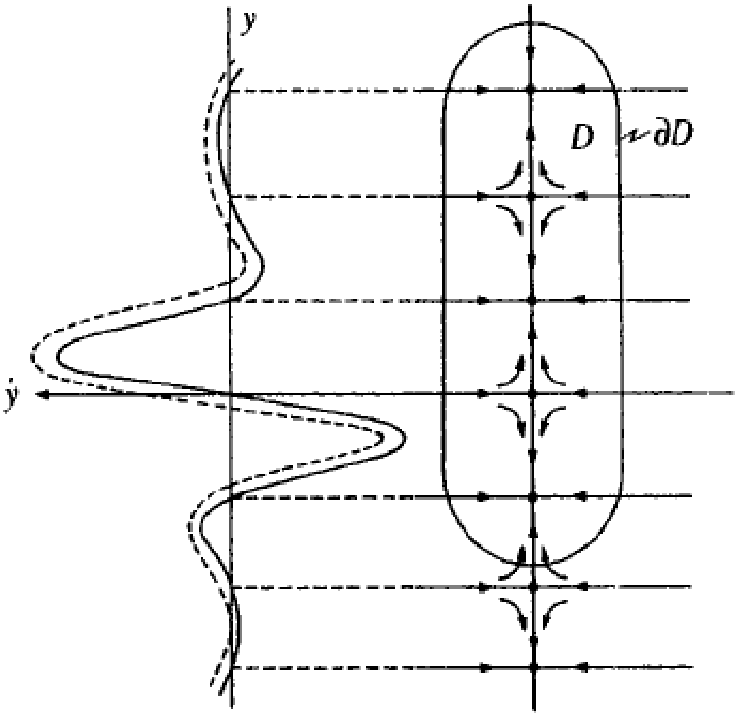
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= \sin(\pi y)\exp(-y^2) + \mu \end{aligned} \tag{2.46}$$

Το διανυσματικό πεδίο της (2.45) είναι το f_0 και

$$\|f_0 - f_\mu\|_1 = \sup\left(\sum_{i=1}^{2} |f_0^i - f_\mu^i| + \sum_{i,j=1}^{2}\left|\frac{\partial f_0^i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_\mu^i}{\partial x_j}\right|\right) = \mu \tag{2.47}$$

Οπότε το f_μ μπορεί να γίνει $\varepsilon - C^1$-κοντά *σϵ όλο το ϵπίπϵδο.* Ωστόσο, το $f_\mu, \mu \neq 0$ μπορεί να δειχθεί ότι έχει μόνο πεπερασμένο αριθμό στάσιμων σημείων. Επομένως η ροή του (2.46) είναι τοπολογικά διαφορετική από αυτήν του (2.45) για οποιαδήποτε μη μηδενική τιμή του μ.

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο τοπολογικός τύπος τς ροής του f_0 αλλάζει αλλάζει όταν το $\mu > 0$, αν και έχει μόνο υπερβολικά σημεία και καθόλου σαγματικές ενώσεις. Σημειώνουμε ότι αφού το επίπεδο δεν είναι συμπαγές, είναι δυνατόν να εμφανιστεί άπειρο πλήθος στάσιμων σημείων. Αν θέλουμε να διατηρήσουμε την επαφή με το θεώρημα 2.10, είναι απαραίτητο σε αυτή την περίπτωση ι να επιβάλουμε μια οριακή συνθήκη στο άπειρο. οδηγούμαστε στο θεώρημα 2.11 μέσω της στερεογραφικής προβολής. 'Ενας άλλος τρόπος για την κατασκευή δομικά ευσταθών ροών στο $\mathbb{R}^2$ είναι μέσω στερεογραφικής προβολής από δομικά ευσταθείς ροές στον S^2.Θα έχουν πεπερασμένο αριθμό υπερβολικών σημείων, και η συμπεριφορά τους στο άπειρο θα αντιστοιχεί με το να έχουν ένα υπερβολικό σημείο στον βόρειο πόλο της σφαίρας βλ. [4].



Σχήμα 2.6: Το πορτραίτο φάσεων του 2.45 σε σχέση με το γράφημα της $\dot{y}$ ως συνάρτηση της y. Το στάσιμο σημείο x^*, y^* είναι σάγμα εαν $d\dot{y}/dy|_{y^*} > 0$ και κόμβος εαν $d\dot{y}/dy|_{y^*} < 0$. Η καμπύλη στο (α) ένα γράφημα του $\dot{y}$ συναρτήσει του y για το 2.46. Η εξασθένηση της ταλάντωσης της $\dot{y}$ σημαίνει ότι δεν υπάρχει στάσιμα σημεία για $\exp(-y^2) < |\mu|$ δηλ για $y^2 > -\ln(|\mu|)$

Κεφάλαιο 3

Παράρτημα

3.1 Διαβάθμιση Δομικής Αστάθεια

Η διακλάδωση από μια δομικά ευσταθή ροή σε μια άλλη (η οποία δεν είναι ισοδύναμη με την πρώτη) λαμβάνει χώρα σε ροές που δεν είναι δομικά ευσταθείς. Οι πιο απλές δομικά ασταθείς ροές είναι οι ροές πρώτου βαθμού αστάθειας, δηλ είναι δομικά ευσταθείς ροές στο σύνολο των ροών που είναι δομικά ασταθείς.

Έστω X_0 το σύνολο των δομικά ευσταθών ροών σε μια πολλαπλότητα M. Μια C^R ροή ϕ_t καλείται ροή πρώτου βαθμού δομικής αστάθειας κατά Andronov-Leontovich εαν η f^r δεν είναι δομικά ευσταθής και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε κάθε ροή $g^t \in X^r \backslash X_0$ είναι που είναι δ κοντινή στην ϕ_t, είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την ϕ_t διαμέσου ενός $\varepsilon-$ ομοιομορφισμού.

Η έννοια αυτή εισήχθη από τον A.A. Andronov και τον E.A. Leontovich το 1938. Ανάκαλυψαν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για μια ροή σε μια περιορισμένη περιοχή στον $\mathbb{R}^2$ να είναι δομικά ασταθής πρώτου βαθμού. θα αναφέρουμε αυτές τις συνθήκες για ροές πάνω σε μια σφάιρα

Ορισμός 3.1. *Έστω M μια συμπαγής πολλαπλότητα διάστασης 2. Ένα διανυσματικό πεδίο $U \in X^r(M)$ ονομάζεται Morse-Smale εαν*

> *Το u έχει ένα πεπερασμένο αριθμό στάσιμων σημείων τα οποία είναι όλα υπερβολικά*
>
> *Το u έχει πεπερασμένο αριθμό υπερβολικών περιοδικών τροχιών*
>
> *Δεν υπάρχουν συνδέσεις μεταξύ των σαγματικών στάσιμων σημείων του u*
>
> *Κάθε τροχία που διαφέρει από τα 1,2 έχει μοναδικό κρίσιμο στοιχείο (δηλ. στάσιμο σημείο η περιοδική τροχιά) ως α,ω-οριακό σύνολο*

Θεώρημα 3.1. *Έστω M μια κλειστή προσανατολίσιμη επιφάνεια τυχαίου γένους, η μια μη προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους $1 \leq p \leq 3$. Το διανυσματικό πεδίο $u \in X^r$ είναι δομικά ευσταθές εαν και μόνο είναι $Morse - Smale$. Επιπλέον, το σύνολο των $Morse - Smale$ διανυσματικών πεδιών, $X_0 \subset X^r(M)$, είναι πυκνό στον $X^r(M)$.*

-

Θεώρημα 3.2. *Έστω ϕ_t μια C^r ροή ($r \geq 3$) σε μια σφαίρα S^2. Τότε η ϕ_t είναι δομικά ασταθής πρώτου βαθμού στον $X^r(S^2)$ αν και μόνο αν τα παρακάτω ευσταθούν:*

Η ϕ_t έχει πεπερασμένο αριθμό στάσιμων σημείων και περιοδικών τροχιών

Η ϕ_t έχει μια μόνο ανεξάρτητη ασταθή τροχία η οποία είναι μια από τους παρακάτω τύπους:

(α) μια φανταστική εστία πρώτου βαθμου

(β) ενας σαγματικός κόμβος πολλαπλότητας 2

(γ) ενας διπλός οριακός κύκλος

(δ) μια διαχωριστική που ενώνει δύο σαγματικά σημεία, όταν κάνει μια περιστροφή τότε η τιμή του σάγματος $\sigma \neq 0$

Οι διαχωριστικές των σαγμάτων και σαγματικών κόμβων οι οποίες δεν είναι ανεξάρτητες ασταθείς τροχιές ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

(α) Μια διαχωριστική ενός σαγματικού κόμβου δεν μπορεί να είναι επέκταση ενός άλλου

(β) Μια διαχωριστική δεν μπορεί να πλησιάσει σπειροειδώς μια διαχωριστική επανάληψη όσο $t \to \infty$

(γ) Η διαχωριστική δεν μπορεί να προσεγγίσει σπειροειδώς ένα διπλό οριακό κύκλο όσο $t \to \infty$ εαν υπάρχει άλλη μια διαχωριστική που πλησιάζει σπειροειδώς τον ίδιο οριακό κύκλο.

Απόδειξη. Από το θεώρημα Peixoto προκύπτει ότι η ϕ_t έχει τουλάχιστον μια ασταθή τροχιά η οποία είναι (α) μη υπερβολικό στάσιμο σημείο, (β) μη υπερβολική περιοδική τροχιά (γ) ένωση διαχωριστικών. Από τις συνθήκες του θεωρήματος όλοι αυτοί οι τύποι δομικής αστάθειας πρέπει να είναι 'ελάχιστοι'. Σημειώνουμε επίσης ότι δύο ανεξάρτητες ασταθείς τροχιές δεν επιτρέπονται, καθώς διαταράσσοντας την μια από αυτές παίρνουμε μια ασταθή ροή που δεν είναι ισοδύναμη με την αρχική. □

Θεώρημα 3.3. *Μια C^r ροή $\phi_t, (r \geq 3)$ που ορίζεται σε μια κλειστή προσανατολίσιμη επιφάνεια M είναι ροή πρώτου βαθμού δομικής αστάθειας στον χώρο $X^r(M)$ αν και μόνο αν*

1. *Η ϕ_t έχει πεπερασμένο αριθμό στάσιμων σημείων και περιοδικών τροχιών*

2. *Η ϕ_t έχει μόνο μια ανεξάρτητη ασταθή τροχιά που να είναι μια από τους παρακάτω τύπους:*

   (α) Μια φανταστική εστία πρώτης τάξης $(\Delta > 0, \sigma = 0, \alpha_3 \neq 0)$

   (β) Ένας σαγματικός κόμβος πολλαπλότητας 2 $(\Delta = 0, \sigma \neq 0, P_2(1, k) \neq 0)$

   (γ) Ένας διπλός οριακός κύκλος $(h = 0, h_2 \neq 0)$

   (δ) Μια διαχωριστική που ενώνει δύο σάγματα

3. *Οι διαχωριστικές των σαγμάτων και των σαγματικών κόμβων οι οποίες δεν είναι ανεξάρτητες ασταθείς τροχιές ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες*

   (α) Μια διαχωριστική σαγματικού κόμβου δεν μπορεί να γίνει σάγμα και δεν μπορεί να είναι επέκταση ενός άλλου

   (β) Μια διαχωριστική δεν μπορεί να προσεγγίσει σπειροειδώς μια επαναληπτική διαχωριστική όσο το $t \to \pm\infty$

   (γ) Μια διαχωριστική δεν μπορεί να προσεγγίσει σπειροειδώς έναν διπλό οριακό κύκλο όσο $t \to \pm\infty$*, εαν υπάρχει άλλη μια που πλησιάζει σπειροειδώς τον ίδιο οριακό κύκλο*

4. *Η ϕ_t δεν έχει μη τετριμμένες επαναληπτικές τροχιές*

5. *Η ϕ_t δεν έχει τροχιές οι οποίες είναι διπλά ασυμπτωτικές σε έναν διπλό οριακό κύκλο*

Απόδειξη. Τα αντικείμενα (1)-(3) αποδεικνύονται παρομοίως με το θεώρημα 3.2. Η βασική διαφορά ανάμεσα στις δύο αποδείξεις είναι η ύπαρξη μη τετριμμένων επαναληπτικών τροχιών οι οποίες είναι διπλά ασυμπτωτικές σε έναν διπλό οριακό κύκλο σε επιφάνειες μη μηδενικού γένους. □

Θεώρημα 3.4. *Ο $X_1^r(M)$ είναι μια πλήρης Banach πολλαπλότητα κλάσης $C^(r-1)$ και διάστασης 1 στον $X^r(M), r \geq 4$, όπου M είναι συμπαγής επιφάνεια (πιθανόν μη προσανατολίσιμη).*

Απόδειξη. Σχηματικά μιλώντας, κάθε ασταθής τροχιά αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη ισότητα στον χώρο $X^r(M)$. Για κάθε $u \in X_1^r(M)$ μπορούμε να ορίσουμε μια γειτονιά $N(u)$ και μια συνάρτηση $f : N(u) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $Df_u : T_u x^r \to \mathbb{R}$ είναι η επί απεικόνιση, και $f^{-1}(0) = N(u) \bigcap X_1^r(M)$. □

Παρομοίως μπορεί κανείς να ορίσει μια δομικά ασταθή τροχιά $j-$βαθμού, ως μια ροή ϕ_t τέτοια ώστε να μην είναι δομικά ασταθής $0, 1, ..., (j-1)-$βαθμού και κάθε ροή g^t κοντά στην ϕ_t είναι τοπολογικά ισοδύναμη με την ϕ_t διαμέσου ενός $\varepsilon-$ομοιομορφισμού $\phi : M \to M$ εφόσον η g^t δεν είναι δομικά ασταθής $0, 1, ..., (j-1)-$βαθμού. Θεωρούμε μια ροή δομικά ασταθής μηδενικού βαθμού ως δομικά ευσταθή.

Αν αποβάλουμε την απαίτηση $d(x, \phi(x)) < \varepsilon$ στον παραπάνω ορισμό, ορίζουμε την δομική αστάθεια κατά Sotomayor.

Ορίζουμε ως $Q\hat{X}_j^r(M)$ το σύνολο των δομικά ασταθών C^r-ροών $j-$βαθμού κατά Sotomayor. Είναι προφανές ότι $X_j^r(M) \subset \hat{X}_j^r(M)$ και ότι η $\hat{X}^r(M) - \bigcup_{n=0}^{j-1} \hat{X}_n^r(M)$.

Χαλαρώνοντας τις συνθήκες της αστάθειας, ο J. Sotomayor θεώρησε το υποσύνολο $\Sigma_1^r \subset X^r(M)/X_0^r(M)$ το οποίο είναι πυκνό στο σύνολο των ασταθών διανυσματικών πεδίων. Για να τυποποιήσουμε αυτό το αποτέλεσμα, εισάγουμε τις παρακάτω συμβάσεις. Ορίζουμε $Q_1^1(Q_1^2)$ το σύνολο όλων των διανυσματικών πεδίων $X \in X^r(M)$ τέτοια ώστε:

- Το X έχει ένα σαγματικό κόμβο πολλαπλότητας 2 ως μοναδικό στάσιμο σημείο

- Το X έχει μόνο υπερβολικές τροχιές

- Τα $\alpha-$ και $\omega-$ οριακά σύνολα οποιασδήποτε τροχιάς είναι είτε στάσιμο σημείο είτε περιοδική τροχιά

- Το X δεν έχει ενώσεις διαχωριστικών

Στην συνέχεια $Q_1 = Q_1^1 \cup Q_1^2$

Θεωρούμε το Q_2 να είναι το σύνολο των διανυσματικών πεδίων $X \in X^r(M)$ τέτοια ώστε:

- Το Q έχει έναν διπλό οριακό κύκλο ως μη υπερβολική τροχιά

- Το X έχει μόνο υπερβολικά στάσιμα σημεία και δεν έχει ενώσεις διαχωριστικών

- Τα $\alpha-$ και $\omega-$ οριακά σύνολα

Τέλος ορίζουμε Q_3 το σύνολο των διανυσματικών πεδίων $X \in X^r(M)$ τέτοια ώστε

- Το X έχει μια ένωση διαχωριστικών τροχιών η οποία είναι μια απλή επανάληψη ($\sigma \neq 0$)
- Το Q έχει μόνο υπερβολικά στάσιμα σημεία και περιοδικές τροχιές
- Τα $\alpha-$ και $\omega-$ οριακά σύνολα των τροχιών είναι είτε στάσιμα σημεία, είτε περιοδικές τροχιές

Το σύνολο των ασταθών διανυσματικών πεδίων $X^r(M)/X_0^r(M)$ συμβολίζεται ως $X_1^r(M)$.

Ένα υποσύνολο $S \subset X$ μιας Banach πολλαπλότητας X λέγεται immersed Banach υποπολαπλότητα κλάσης C^s και συνδιάστασης k εάν υπάρχει μια ακολουθία S_i αλληλοκαληπτώμενων υποπαλλαπλοτήτων κλασής C^s και συνδιάστασης k του X τέτοια ώστε $S_i \subset S_{i+1}$ και $S = \bigcup S_i$. Τότε ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα

Θεώρημα 3.5. *Το σύνολο $\Sigma_1^r = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$ είναι μια immersed Banach υποπολαπλότητα κλάσης C^{r-1} και συνδιάστασης 1 στον $X^r(M), r \geq 4$. Επιπλέον, το σ_1^r είναι πυκνό στον $X_1^r(M)$ και κάθε $X \in \Sigma_1^r$ έχει μια γειτονιά $U(X)$ στον χώρο Σ_1^r τέτοια ώστε το X να είναι τοπολογικό ισοδύναμο με κάθε $Y \in U(X)$*

3.2 Τυπικές ιδιότητες ασταθών ροών

Σύμφωνα με το θεώρημα 5.1.1 το σύνολο X_0 των δομικά ευσταθών ροών είναι παντού πυκνό στον χώρο $X_k^r(M), 1 \leq k \leq r$, εφόσον η M είναι μια κλειστή προσανατολίσιμη επιφάνεια ή μια κλειστή μη προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους $1 \leq g \leq 3$. Μια ενδιαφέρουσα ερώτηση είναι τι γνωρίζουμε για το σύνολο X_1^r των ροών πρώτου βαθμού αστάθειας (κατά Andronov-Leontovich) στον χώρο $X_1^r(M)/X_0^r(M)$ των ασταθών ροών·

Θεώρημα 3.6. *1. Για $r \geq 3$ το σύνολο $X_1^r(S^2)$ είναι ανοιχτό και πυκνό στον χώρο $X^r(S^2)/X_0(S^2)$ για όλες τις μη ευσταθείς ροές πάνω στην σφαίρα 2. Για $r \geq 2$ το σύνολο $Q^r(T^2)$ όλων των ροών χωρίς στάσιμα σημεία (πρώτου βαθμού δομικής αστάθειας) είναι ανοιχτό και πυκνό στο σύνολο όλων των ασταθών ροών χωρίς στάσιμα σημεία στον T^2.*

Θεώρημα 3.7. *Έστω M μια κλειστή προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους $g \geq 2$. Τότε το σύνολο $X_1^r(M)$ δεν είναι πυκνό στον χώρο $X^r/X_0^r(M), r \geq 1$*

Για την ακρίβεια, η κατάσταση στις ροές πρώτου βαθμού αστάθειας σε μια κλειστή προσανατολίσιμη υπερβολική 2-πολλαπλότητα είναι παρόμοια με το φαινόμενο Smale το οποίο συμβαίνει σε δομικά ευσταθείς ροές πάνω σε πολλαπλότητες διάστασης n. Οι δομικά ευσταθείς ροές δεν είναι παντού πυκνές στον χώρο όλων των ροών στις συμπαγείς πολλαπλότητες εαν $n \geq 3$.

Βιβλιογραφία

[1] Andronov, A. A. and Pontryagin, L. S. (1937), "Systèmes Grossières", *C.R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS (N.S.)* 14: 247?251.

[2] Peixoto,M.M. (1962), Structural stability on two-dimensional manifolds, *Topology*,2:101-21

[3] Arnold and Avez,1968,pp. 196-200

[4] D.K. ArrowSmith, 1990, *An introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press

[5] M.W. Hirsch and S.Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*,Academic Press

[6] I.Nikolaev,E.Zhuzhoma,1999,*Flows on 2-dimensional Manifolds*, Springer-Verlag